§2 Lichtausbreitung durch eine Grenzschicht zwischen zwei Dielektrika

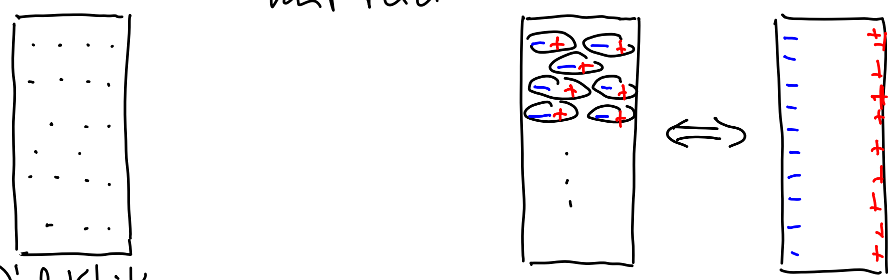
§2.1 Stetigkeitsbedingungen und Brechungsgesetz

Wie verhalten sich elektrische und magnetische Felder in der Nähe einer Grenzschicht zweier Dielektrika?

Dazu erinnern wir uns an die Energiedichte im Plattenkondensator. Wir laden den Kondensator auf, koppeln ihn von der Stromquelle ab und beobachten, wie sich der Potentialunterschied zwischen den Platten ändert, wenn ein Dielektrikum zwischen die Platten geschoben wird. Die beobachtete Potentialänderung wird durch die statische Polarisation der einzelnen Moleküle im äußeren Feld und durch die entstehende Oberflächenladung erklärt.

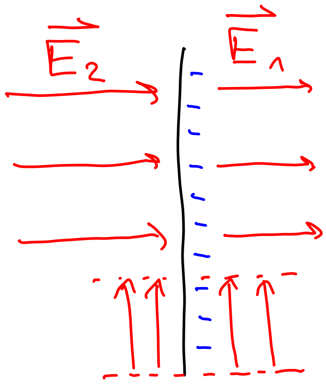
ohne Feld haben die Atome/Moleküle kein Dipolmoment

mit Feld



Dielektrikum

Die Oberflächenladung $\sigma \left[\frac{As}{m^2}\right]$ erzeugt ein Feld, das in Richtung senkrecht zur Oberfläche dem äußeren Feld entgegengesetzt ist. Die Normalkomponenten des elektrischen Feldes ändern sich also sprunghaft an der Oberfläche.



$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \sigma / \varepsilon_0$$

In Richtung tangential zur Oberfläche gibt es keine effektive Polarisation. Also sind die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ stetig an der Oberfläche. ... Entsprechend sind die Normalkomponenten von $\vec{B}$ stetig.

N.R.: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \rho / \varepsilon_0$$

in z-Richtung

$$\partial_z E_z = \rho / \varepsilon_0$$

$$E_z - E_0 = \underbrace{\int \rho \, dz}_{= \sigma} / \varepsilon_0$$

Die Stetigkeitsbedingungen müssen auch bei zeitlich variierenden Feldern in allen Punkten der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika und zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein.

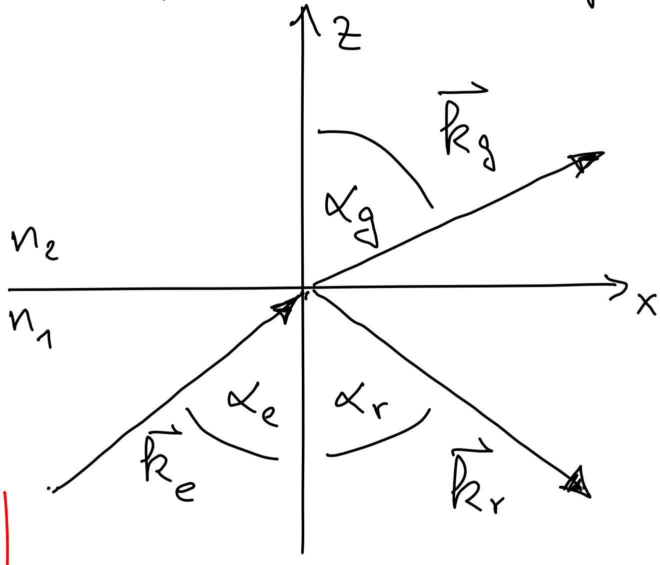
Wenn eine elektromagnetische Welle $\vec{k}_e$ auf eine Grenzschicht trifft und eine gebrochene Welle $\vec{k}_g$ und eine reflektierte Welle $\vec{k}_r$ erzeugt, dann müssen dazu die Phasen aller Wellen zu jedem Zeitpunkt an jedem Ort der Grenzfläche gleich sein:

$$\left. e^{i\vec{k}_e\vec{r}-i\omega t}\right|_{z=0} = \left. e^{i\vec{k}_g\cdot\vec{r}-i\omega t}\right|_{z=0} = \left. e^{i\vec{k}_r\cdot\vec{r}-i\omega t}\right|_{z=0}$$

$$\Rightarrow (\vec{k}_r\cdot\vec{r})_{z=0} = (\vec{k}_e\cdot\vec{r})_{z=0} = (\vec{k}_g\cdot\vec{r})_{z=0}$$

Dies erfordert, dass alle $\vec{k}$-Vektoren in einer Ebene liegen.
Wir wählen die x-z-Ebene

$$|k| = n\cdot\frac{\omega}{c} \Rightarrow |\vec{k}_e| = |\vec{k}_r|$$



$$\underbrace{k_r\sin\alpha_r = k_e\sin\alpha_e}_{\Rightarrow\ \alpha_r=\alpha_e} \qquad \underbrace{k_e\sin\alpha_e = k_g\sin\alpha_g}$$

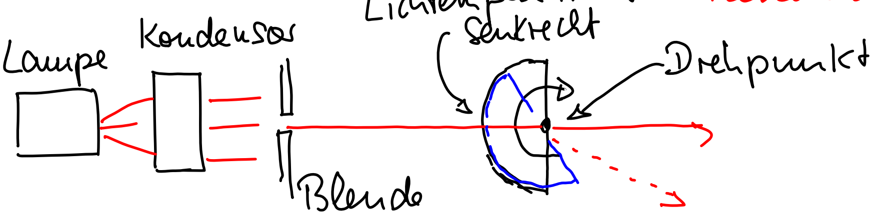
$$\Rightarrow \alpha_r = \alpha_e$$

$$\boxed{n_1\sin\alpha_e = n_2\sin\alpha_g}$$

||| Brechungsgesetz |||

Ibn Sahl	984 !!
Thomas Harriott	1601
Willebrord Snell	1621
Réné Descartes	1637

Experiment



§2.2 Fresnelsche Formeln (Augustin Jean Fresnel)

Als nächstes interessiert die Amplitude des elektrischen Feldes des gebrochenen und des reflektierten Strahls und wie diese vom Einfallswinkel abhängen. Dazu benötigen wir noch zwei weitere Stetigkeitsbedingungen. Wir erinnern uns nochmal an den Plattenkondensator. Wenn man anstelle des Verlaufs des elektrischen Feldes E den der dielektrischen Verschiebungsdichte betrachtet, $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, dann hat man eine Größe, deren Normalkomponente sich nicht ändert. Insgesamt sind die vier Bedingungen:

Tangentialkomponenten von E und H
sowie die Normalkomponenten von D und B sind stetig.

In Formeln:

$$\left[\vec{E}_e + \vec{E}_r - \vec{E}_g\right] \times \vec{n} = 0 \qquad (\vec{E})$$

$$\left[\vec{k}_e \times \vec{E}_e + \vec{k}_r \times \vec{E}_r - \vec{k}_g \times \vec{E}_g\right] \cdot \vec{n} = 0 \qquad (\vec{B})$$

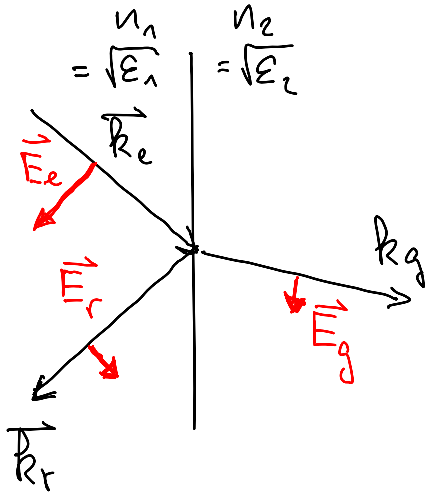
$$\left[\varepsilon_1\left(\vec{E}_e + \vec{E}_r\right) - \varepsilon_2 \vec{E}_g\right] \cdot \vec{n} = 0 \qquad (\vec{D})$$

$$\left[\frac{\vec{k}_e \times \vec{E}_e}{\mu_1} + \frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\mu_1} - \frac{\vec{k}_g \times \vec{E}_g}{\mu_2}\right] \times \vec{n} = 0 \qquad (\vec{H})$$

Wir betrachten hier Dielektrika, d.h. $\mu_1 = \mu_2 = 1$
Statt der Permittivität $\varepsilon_{1,2}$ verwenden wir die Brechzahl

$$n_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2}} \quad , \quad |\vec{k}| = k = \frac{\omega}{c} \cdot n$$

Wir unterscheiden die Feldkomponenten parallel ($\parallel$) und senkrecht ($\perp$) zur Einfallsebene.



2-4

$E_{r,g}^{\parallel,\perp}$ als Funktion von $\vec{E}_e, \alpha_e, n_1, n_2$

1. Fall $\quad \vec{E}_e \perp$ Einfallsebene

$$\frac{E_g^{\perp}}{E_e} = \frac{2 n_1 \cos\alpha_e}{n_1 \cos\alpha_e + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha_e}} \xrightarrow{\alpha_e \to 0} \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_r^{\perp}}{E_e} = \frac{n_1 \cos\alpha_e - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha_e}}{n_1 \cos\alpha_e + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha_e}} \xrightarrow{\alpha_e \to 0} \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

2. Fall, $\vec{E}_e \parallel$ zur Einfallsebene

$$\frac{E_g^{\parallel}}{E_e} = \frac{2 n_1 n_2 \cos\alpha_e}{n_2^2 \cos\alpha_e + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha_e}} \xrightarrow{\alpha_e \to 0} \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$$

$$E_r^{\parallel} = - \frac{n_2^2 \cos\alpha_e - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha_e}}{n_2^2 \cos\alpha_e + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha_e}} \xrightarrow{\alpha_e \to 0} \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$