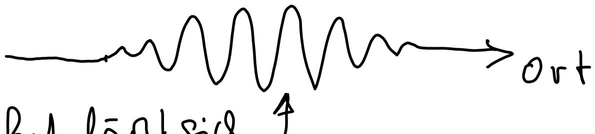
§4 Andere Wellenphänomene als Licht

Ziel an anderen auch aus dem Alltag bekannten Wellen üben, um dann auch Materiewellen zu behandeln.
Zunächst aber: was für Geschwindigkeiten gibt es?

§4.1 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit: Geschwindigkeit der Wellenberge und -täler $v_p = \frac{\omega}{k}$ (s. oben)

Nun wollen wir ein Wellenpaket betrachten:



So ein Paket läßt sich konstruieren durch eine Überlagerung unterschiedlicher harmonischer Wellen, die alle an genau dieser Stelle ein Maximum haben
(Umgekehrte Richtung: Zerlegung oder Entwicklung nach Fourier)

D.h. die Welle hat mehrere unterschiedliche k-Anteile um einen zentralen Wert k_0 herum (Gruppe von ebenen Wellen).
Zu jedem k gehört ein $\omega(k)$, das man um k_0 entwickeln kann:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_0} (k-k_0) + \cdots$$

Das Argument der Wellenfunktion ist (s.o.) $\omega t - kx$,
[Erinnerung aus $\omega t - kx = \text{const}$ hatten wir die Phasengeschwindigkeit abgeleitet]

$$\omega t - kx = \omega(k_0)t + \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_0} \Delta k t - (k_0 + \Delta k)x$$

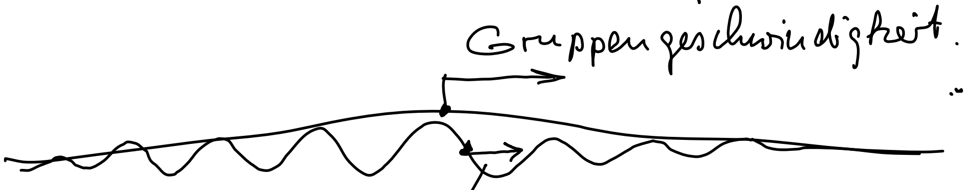
$$= \omega(k_0)t - k_0 x + \left[\left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_0} t - x\right] \Delta k$$

Das Maximum des Wellenpakets ist dort, wo alle ebene Wellen mit unterschiedlichem k in Phase sind.

Diese Bedingung, "alle k-Wellen haben feste Phase zueinander", definiert dann die Geschwindigkeit des Pakets (oder der Gruppe).

D.h. die Gruppengeschwindigkeit bestimmt sich aus:
Δk-abhängiger Anteil von "$\omega t - kx$" ist konstant.

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_0} t - x = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{\text{gruppe}} = \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{k_0}}$$

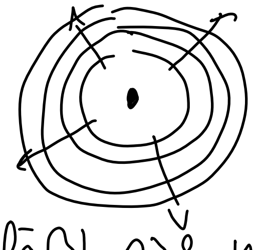


§4.2 Empirischer Zugang zu Wasserwellen

((N.B.: Schall (nahe zu) identisch mit Licht))

Wasserwellen $\lambda \ll 1$ Kapillarkräfte dominieren
$\lambda \gg 1$ Schwerkraft dominiert.

Dispersion? Stein ins Wasser



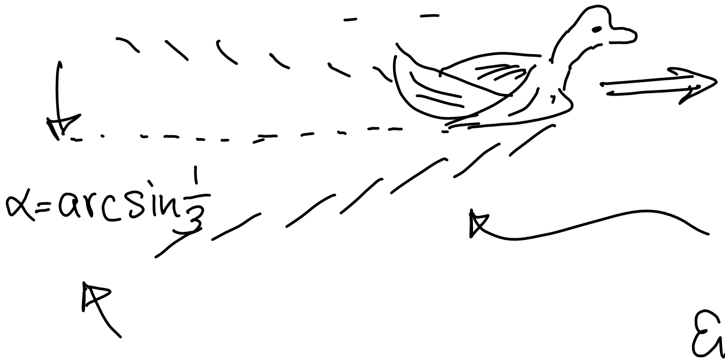
experimentelle Beobachtung:

$$v_{\text{gruppe}} = \frac{1}{2} v_{\text{phase}}$$

Die Beziehung läßt sich noch schöner herleiten aus der Beobachtung der V-förmigen Wellen hinter einer Ente, einem Boot etc.

Achtung! Bei $\lambda \lesssim 1\,\text{cm}$ dominiert Oberflächenspannung die Wellendynamik
Bei $\lambda \gtrsim 1\,\text{cm}$ dominiert die Schwerkraft
Diesen Fall betrachten wir

α = Kelvinwinkel

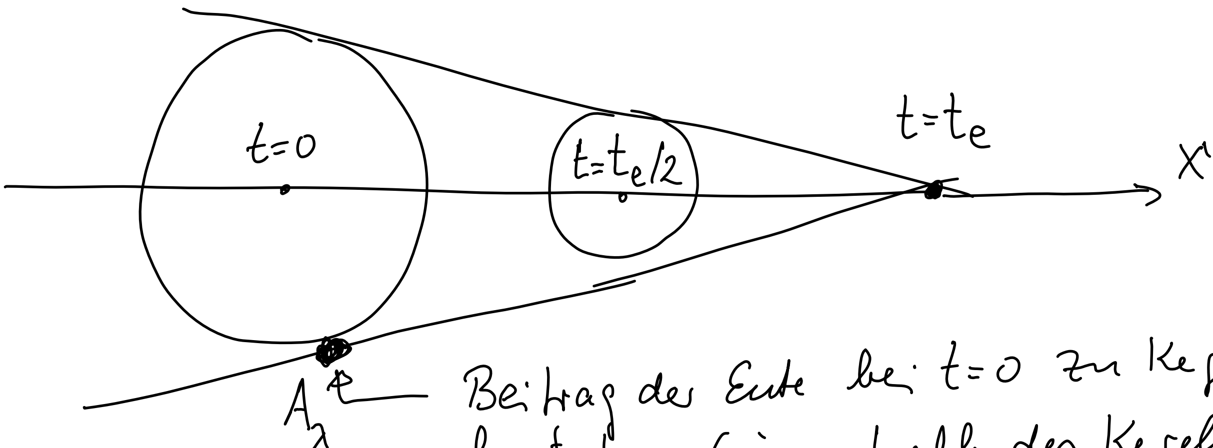


Wie Überschallkegel ?!?

Ente ist schneller als die Wellen!
α unabhängig von v_{Ente}

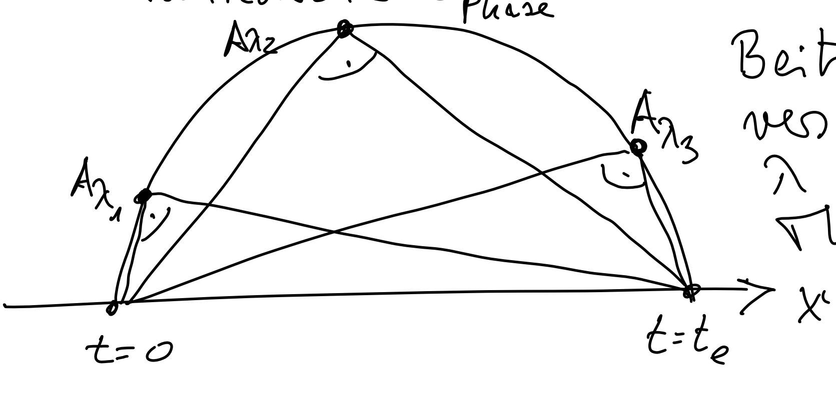
§4.2.1 Dispersionsbeziehung aus Kelvinwinkel

Annahme nur ein "λ" wird von Ente angeregt,
$v_{phase} < v_{Ente}$



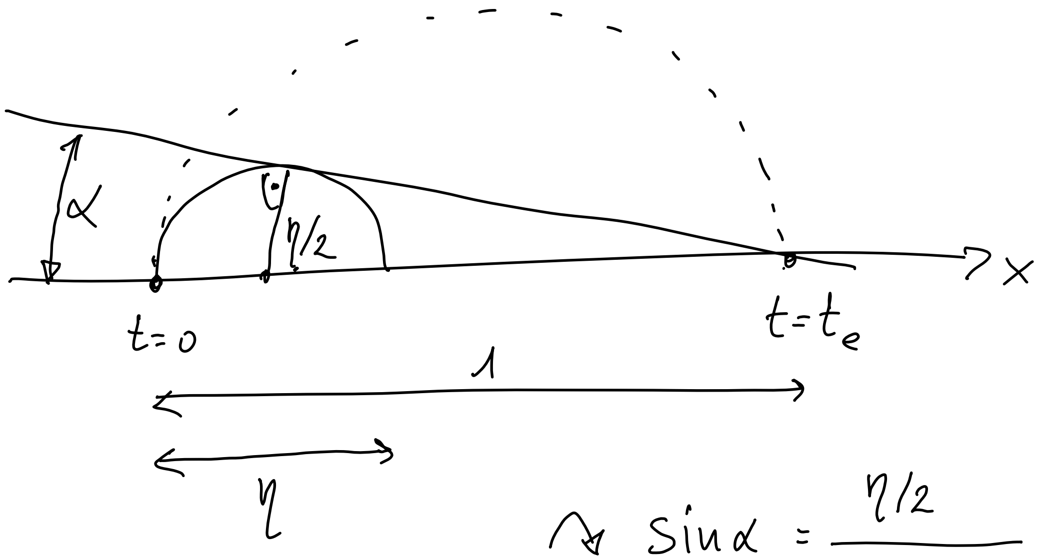
Beitrag der Ente bei $t=0$ zu Kegel bei $t=t_e$ (innerhalb des Kegels destruktive Interferenz)

mehrere λ mit unterschiedlicher v_{Phase}



Beiträge der verschiedenen λ liegen auf Thales Kreis!

Aber: wenn $v_{gruppe} < v_{Phase}$ dann schrumpft der Thaleskreis entsprechend



$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\eta/2}{1-\eta/2} = \frac{1}{\frac{2}{\eta}-1}$$

Exp Beobachtung

$\alpha \cong \arcsin 1/3$

$$\Rightarrow \frac{2}{\eta}-1=3, \quad \text{d.h. } \eta=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boxed{v_{gruppe}=\frac{1}{2}v_{phase}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{1}{2}\frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \int\frac{d\omega}{\omega}=\frac{1}{2}\int\frac{dk}{k} \quad \Rightarrow \ln\omega=\frac{1}{2}\ln k + A'$$

Integrationskonstante

$$\Rightarrow \boxed{\omega = A\cdot\sqrt{k}}, \quad (A=e^{A'})$$

Dispersionsbeziehung der Wasserwellen