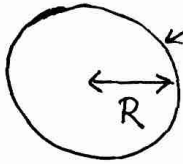


(a)

AUFGABE 1



Q auf Oberfläche

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r} \text{ radial} \\ (\text{wg. Kugelsymmetrie!})$$

⇒ mit Satz von Gauß:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} \\ (\text{Kugelfläche bei } r)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ für } r > R \\ E(r) = 0 \text{ für } r < R \end{cases}$$

(b)

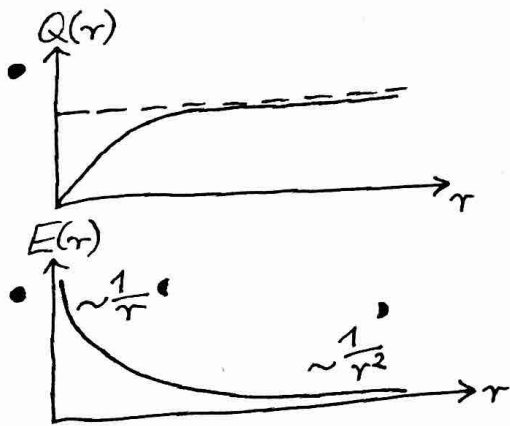
$$S(\vec{r}) = S_0 \frac{e^{-r/R}}{r^2}$$

(Bem.: S_0 hat nicht die Dim. einer Lsgs.dichte!)

wie in (a): Satz von Gauß: $E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\text{mit } Q(r) = \int_0^r S(\vec{r}') \underbrace{4\pi r'^2 dr'}_{\text{Kugelvolumen-element}} = S_0 4\pi \int_0^r e^{-r'/R} dr'$$

$$= 4\pi S_0 (-R) e^{-r'/R} \Big|_0^r = 4\pi S_0 R \underbrace{(1 - e^{-r/R})}_{\approx \frac{r}{R} \text{ für } r \ll R}$$



(c)

Dipolmoment von $\vec{S}(\vec{r}) = \frac{z}{R} S(\vec{r})$:

$\vec{p} = \int \vec{S}(\vec{r}) \vec{r} d^3\vec{r}$ hat nur z-Komponente, weil $\int xz S(\vec{r}) d^3\vec{r} = 0$ aus Symmetrie (genauso yz).

$$p_z = \frac{S_0}{R} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{e^{-r/R}}{r^2} z^2 \cdot r^2 \sin\theta d\theta dr d\phi \\ \text{Kugelvolumen-element} \\ \uparrow \text{P-Int.} \\ = 2\pi \frac{S_0}{R} \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-r/R} z^2 \sin\theta d\theta dr \\ \text{z} = r \cos\theta \\ \int_{-1}^1 \cos^2\theta d(\cos\theta) \\ \bullet \int_{-1}^1 w^2 dw = \frac{w^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} \\ = 2\pi \frac{S_0}{R} \cdot \frac{2}{3} \cdot \int_0^\infty r^2 e^{-r/R} dr \\ \underbrace{\int_0^\infty r^2 e^{-r/R} dr}_{2R^3} \\ = \frac{8\pi}{3} S_0 R^2$$

AUFGABE 2

~~(a) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$~~

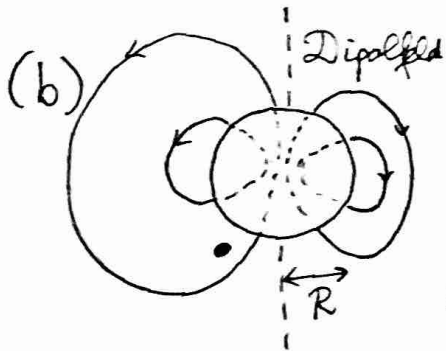
(a) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3\vec{r}(\vec{m}\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$

$\frac{\text{div } \vec{B}}{\frac{\mu_0}{4\pi}} \stackrel{!}{=} \partial_j \left\{ \frac{3r_j(m_e r_z)}{r^5} - \frac{m_z}{r^3} \right\}$

$\partial_j f(r) = f'(r) \hat{r}_j$

$\vec{B} = 3 \cdot \left(\frac{3(m_e r_z)}{r^5} + \frac{r_j m_e \delta_{jj}}{r^5} - \frac{5}{r^6} r_j r_j (m_e r_z) \right) + m_z \frac{3}{r^4} \cdot \hat{r}_j$

$= 3 \cdot \left(\frac{4(\vec{m}\vec{r})}{r^5} - \frac{5(\vec{m}\vec{r})}{r^5} \right) + 3 \frac{(\vec{m}\vec{r})}{r^5} \stackrel{!}{=} 0 \checkmark$



Ansatz:

$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\text{Dip}}$

wollen an Oberfläche: $\vec{B}\vec{r} \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \vec{B}_0\vec{r} + \vec{B}_{\text{Dip}}\vec{r} \stackrel{!}{=} 0$

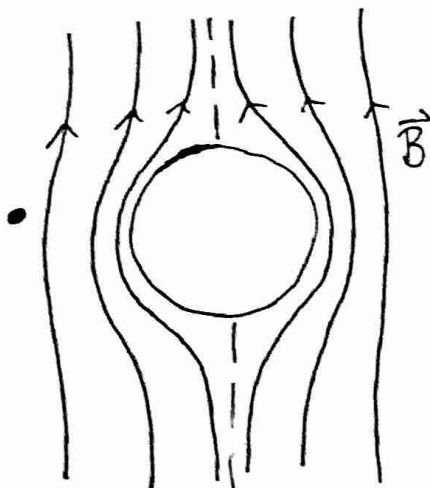
$\vec{B}_0\vec{r} + \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m}\vec{r})}{r^3} - \frac{(\vec{m}\vec{r})}{r^3} \right) \stackrel{!}{=} 0$

bei $r=R$

$\Rightarrow \vec{B}_0\vec{r} \stackrel{!}{=} - \frac{2\vec{m}\vec{r}}{R^3} \frac{\mu_0}{4\pi} \quad \forall \vec{r} \in \text{Oberfl.}$

brauchen: $\vec{m} \stackrel{!}{=} - \frac{2\pi R^3}{\mu_0} \vec{B}_0$

Skizze:



AUFGABE 3

(a) Ansatz: $\vec{E} = \hat{z} E(x)$
 $\vec{B} = \hat{y} B(x)$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \text{ liefert: } \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_x E \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} - \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_t B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \partial_x E = \partial_t B$$

$$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \text{ liefert: } \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x B \end{pmatrix} = \underbrace{\epsilon_0 \mu_0}_{\frac{1}{c^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_t E \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \partial_x B = \frac{1}{c^2} \partial_t E$$

z.B. ∂_x auf erste Glg. $\Rightarrow \partial_x^2 E = \partial_t \underbrace{\partial_x B}_{\frac{1}{c^2} \partial_t E} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E$

Ansatz $E(x,t) = f(x-ct)$ & $B(x,t) = \frac{1}{c} f(x-ct)$
 passt zu beiden Glg. n:
 (1) $\partial_x E = f'(x-ct) = \partial_t B = +f'(x-ct)$
 (2) $\partial_x B = -\frac{1}{c} f'(x-ct) = \frac{1}{c^2} \partial_t E = -\frac{1}{c} f'(x-ct)$ ✓

(b) Nun mit vorgegebener Stromdichte: $\vec{j} = \hat{z} j(x,t)$
 $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}$ liefert nun:
 (vgl. oben) z-Komponente: $\partial_x B = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \partial_t E$

(c) Für Ansatz $E(x,t) = E(x) \sin(\omega t)$
 $B(x,t) = B(x) \cos(\omega t)$
 $j(x,t) = j(x) \cos(\omega t)$
 folgt: $\partial_x B = \mu_0 j + \frac{\omega}{c^2} E$
 & $\partial_x E = -\omega B$

(d) Noch spezieller: $E(x) = E_0 \sin(kx)$
 $B(x) = B_0 \cos(kx)$
 $j(x) = j_0 \sin(kx)$
 $\Rightarrow -B_0 k = \mu_0 j_0 + \frac{\omega}{c^2} E_0$
 $k E_0 = -\omega B_0$
 2. Glg. $\Rightarrow B_0 = -\frac{k}{\omega} E_0$ in 1. Glg. $\Rightarrow E_0 = \frac{\mu_0 j_0}{\frac{k^2}{\omega} - \frac{\omega}{c^2}}$
 Divergenz für $\omega^2 = c^2 k^2$

AUFGABE 4

(a) $X_{\pm}(t) = \pm \frac{l}{2} + vt$

$X'_{\pm}(t') = \pm \frac{l'}{2}$

(~~die~~ $x' = \pm \frac{l'}{2}, t' = 0$) entspricht laut

Lorentztransformation:

$\tilde{X}_{\pm} = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\pm \frac{l'}{2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$\tilde{X}_+ - \tilde{X}_- = \frac{l'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > l' \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l$

• Grund: l würde zu gleichen Zeiten im Laborsys. gemessen (aber \tilde{X}_{\pm} sind nicht zu gleichen Zeiten)

$\tilde{T}_{\pm} = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\pm \frac{v}{c^2} \frac{l'}{2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

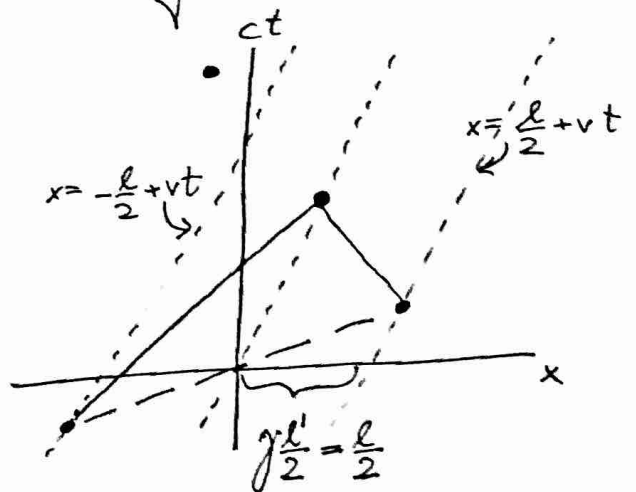
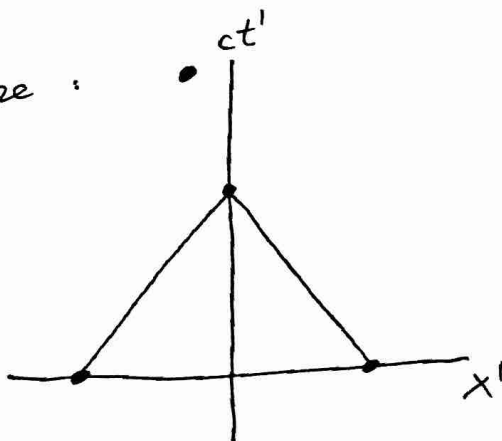
(b) Im Lew. Sys.: Lichtsignale starten gleichzeitig, haben gleiche Distanz \Rightarrow kommen gleichzeitig bei $x' = 0$ an, nämlich zur Zeit $t' = \frac{l'}{2c}$.

Im Lab. sys.: ($x' = 0, t' = \frac{l'}{2c}$) entspricht einem Raumzeitpunkt:

$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v \frac{l'}{2c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\frac{l'}{2c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ (Zeitdilatation!)

(c) Skizze:



(d)



Im Laborsystem:

2 Photonen, mit

Vier-Impuls $P^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{E'}{c} \\ \pm p' \end{pmatrix} \stackrel{(\pm)}{\downarrow} (p', \pm p')$

Energieverlust im Laborsystem: $-2E = -2cp' = \Delta E'$ x-Komponente

\Rightarrow Im Laborsystem:

$$\begin{aligned} \bullet P^0 &= \frac{P^{10} + \frac{v}{c} P^{11}}{\gamma} & \bullet P^1 &= \frac{P^{11} + \frac{v}{c} P^{10}}{\gamma} \end{aligned}$$

$$\bullet P^0 = \frac{p' \pm \frac{v}{c} p'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1 \pm \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} p'$$

\Rightarrow Gesamt-Energieverlust im Laborsystem:

$$\begin{aligned} \Delta E &= -c \cdot \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} p' + \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} p' \right) \\ &= \frac{-2cp'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta E'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\Delta m_0 = + \frac{\Delta E'}{c^2}$$

~~passt zu~~

~~$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{\Delta E'}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$~~

passt zu $\bullet \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{\Delta E'/c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \checkmark$

(e)