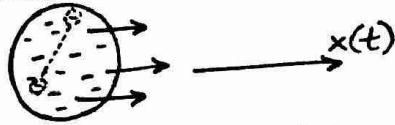


Elektromagnetische Masse & Strahlungsdämpfung

1 Einleitung



Selbst-Wechselwirkung des e^- durch (retardierte) Felder \Rightarrow Zusatz-Beiträge zur Gesamtkraft!

$$m_0 \ddot{x} = -\nabla V(x) \underbrace{- \Sigma m_0 \ddot{x}}_{F_{\text{Selbst}}} + \underbrace{\text{const } \ddot{x}}_{\text{"Strahlungsdämpfung"} + \dots}$$

"elektromagnetischer Beitrag zur Masse"

Erwartung: $\Sigma m_0^{\text{class}} = \frac{E_{\text{class}}}{c^2}$ ↙ Ladungsdichte des e^-

$$E_{\text{class}} = \frac{1}{2} \int \frac{\rho(r) \rho(r')}{4\pi \epsilon_0 |r-r'|} d^3r d^3r'$$

$$= \text{const} \cdot \frac{Q^2}{4\pi \epsilon_0 R} \leftarrow \text{"e-Radius"}$$

Geometriefaktor (hängt von Details von ρ ab)

Bem.: Um die gesamte beobachtete Masse des e^- zu erklären, braucht man

$$R \sim \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{m_0^{\text{ges}} c^2} \sim 3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

"klassischer e^- -Radius" R_{cl}

m_0^{ges} soll alles enthalten $\sim 10^{-31} \text{ kg}$

Erwartung zum \ddot{x} -Term:

Dipol strahlt Leistung P ab
 \Rightarrow wollen

$$\langle F_{\ddot{x}} \cdot \dot{x} \rangle = -P$$

\swarrow
Zeitmittel

$$F_{\ddot{x}} = K \ddot{x} \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

$$-\omega^4 K x_0^2 \underbrace{\langle \sin^2(\omega t) \rangle}_{\frac{1}{2}} = -P = - \frac{\omega^4 Q^2 x_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

siehe Dipol-
Abstrahlung!

\Rightarrow brauchen

$$K = \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

Bem.: R geht nicht ein,
auch die Details der
Geometrie / Ladg. verteilung
sind unwichtig!

$$\text{Bem.: } K = m_0 \underbrace{\frac{R c e}{c}}_c$$

Zeit, die das
Licht bräuchte, um
den klassischen e^- -Radius
zu durchqueren!

Bem.: Die neue Bew. glg.

$$m_0^{\text{ges}} \ddot{x} = K \ddot{x}$$

hat unphysikalisch explodierende
Lösungen

$$x(t) = x(0) \cdot e^{\frac{t}{\tau_{ce}}}$$

mit $\tau_{ce} = \frac{m_0^{\text{ges}}}{K} = \frac{c}{R c e} \sim 10^{-23} \text{ s}$

! Diese werden
(hoffentlich) \leftarrow
durch Berücksichtigung der
inneren Struktur des e^-
unterdrückt (auf so
kurzen Zeiten werden die höchsten
Terme \ddot{x} etc. wichtig!)

Bem.: In der praktischen Anwendung
setzt man näherungsweise

$$\ddot{x} \approx \ddot{x}_{(0)}$$

↑ Lösung der Glg. ohne \ddot{x} -Term
⇒ keine Probleme mehr!

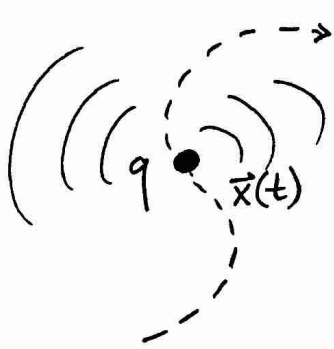
z.B. $m_0^{\text{ges}} \ddot{x} = -V'(x) + K \ddot{x}$

↪ $m_0^{\text{ges}} \ddot{x} \approx -V'(x) + \underbrace{-K V''(x) x}_{\frac{m_0^{\text{ges}}}{m_0}}$

Hier verwendet:
 $m_0^{\text{ges}} \ddot{x} \approx -V'(x)$
ohne K -Term

2 Liénard-Wiechert Potentiale

Wir hatten (in Lorenz Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0 \Leftrightarrow \nabla \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$)



$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

wobei $t_{ret} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$

analog \vec{A} (mit \vec{j})

⇒ für beliebig bewegte Punktladung q:

$$S(\vec{r}', t') = q \delta^3(\vec{r}' - \vec{x}(t'))$$

Jetzt Vorsicht!

$$\int f(\vec{r}') \delta^3(\vec{r}' - \underbrace{\vec{x}(t_{ret}(\vec{r}'))}_{\vec{x}(\vec{r}')}) d^3r'$$



Erinnerung:

$$\int \delta(\lambda x) dx = \int \delta(\lambda x) \frac{d(\lambda x)}{|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|}$$

$$= f(\vec{x}(t_{ret})) \cdot \frac{1}{|\det(\frac{\partial z_i}{\partial r'_e})|}$$

aus Glg.

$$t_{ret} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{x}(t_{ret})|}{c}$$

Jacobi-Determinante der Koord.trafo!

$$= f(\vec{x}(t_{ret})) \cdot \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}}$$

mit $\vec{\beta} \equiv \frac{\dot{\vec{x}}(t_{ret})}{c}$ und $\hat{n} \equiv \frac{\vec{r} - \vec{x}_{ret}}{|\vec{r} - \vec{x}_{ret}|}$

1D Bsp.:

$$\frac{1}{|1 - \underbrace{\frac{\partial x}{\partial t_{ret}}}_{v_{ret}} \cdot \underbrace{\frac{\partial t_{ret}}{\partial r'}}_{+\frac{1}{c} \text{sign}(r-x)}|} = \frac{1}{|1 - \frac{v_{ret}}{c} \cdot \text{sign}(r-x)|}$$

⇒

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}_{ret}|} \cdot \frac{1}{1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n}}$$

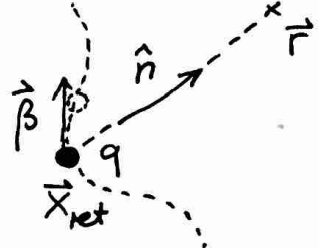
} Liénard-Wiechert (LW) Potentiale

analog:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \dots = \frac{\vec{\beta}}{c} \phi(\vec{r}, t)$$

Daraus die Felder:

mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$
 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$



Vorricht: $\vec{x}_{ret} = \vec{x}(t_{ret}) = \vec{x}(t_{ret}(\vec{r}))$
 $\vec{\beta} = \frac{\dot{\vec{x}}(t_{ret}(\vec{r}))}{c}$

r - Abh.keit hier!

⇒ ... ⇒

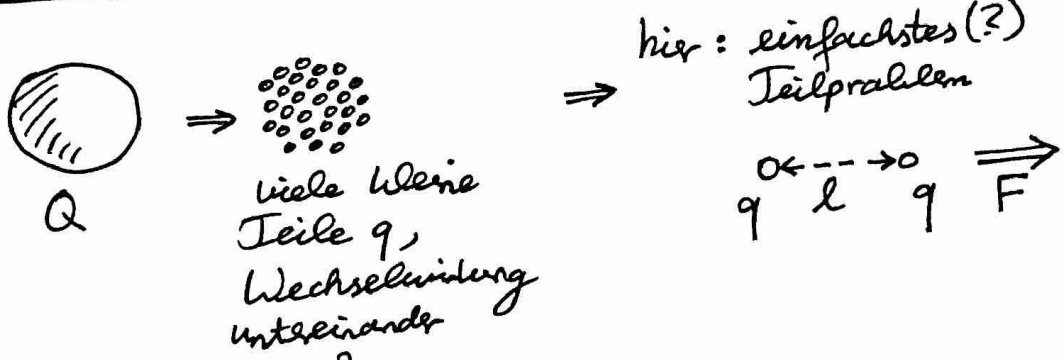
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{(\hat{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{x}_{ret}|^2} + \frac{\hat{n} \times ((\hat{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{c(1 - \hat{n} \cdot \vec{\beta})^3 |\vec{r} - \vec{x}_{ret}|} \right)$$

} Dipol-Strahlung!
 $\sim \frac{1}{r}$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{n}}{c} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

3 Elektromagnetische Masse

3.1 Coulomb-Anteil



$$E_{\text{Coul}} = \sum_{i,j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{|r_i - r_j|} \cdot \frac{1}{2}$$

Beitrag zur Masse aus Coulomb-Energie:

$q \xleftarrow{l} q$

$$\Delta m_0^{\text{Coul}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{l} \cdot \frac{1}{c^2}$$

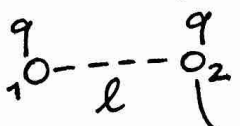
(Bem.: Selbst-WW der einzelnen q hier nicht berücksichtigt; dieser Anteil wird immer unwichtiger, wenn man Q in N Teile $q = \frac{Q}{N}$ zerlegt und $N \rightarrow \infty$ sendet, weil es dann $\frac{N(N-1)}{2}$ Beiträge $\sim \frac{q^2}{l}$ gibt aus der WW verschiedener q !)

Können wir das aus retardierten Kräften $q\vec{E}$ bekommen?

$$m_0 \ddot{x} = - \underbrace{\sum m_0 \ddot{x}}_{\parallel \sum m_0^{\text{Coul}} ??} + \dots$$

Bewegung 1D, in x-Richtung, beschleunigt mit $a = \ddot{x}$ (7)

$$x_2(t) = \pm \frac{l}{2} + \frac{a}{2} t^2$$



Bem.:
Längenkontraktion
wäre Korrektur
 $\sim a^2$

E-Feld von Ladung 1, auf q bei x_2 ?

" $n=1$ " weil $x_2 - x_1$ positiv \rightarrow Quelle

$$E_2(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta)^2} \frac{1}{|x_2^{(t)} - x_{1ret}|^2} \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

Bem.: Der zweite Term ($\vec{\beta}$ -Term) fällt weg, weil $\hat{n} - \vec{\beta} \parallel \vec{\beta}$

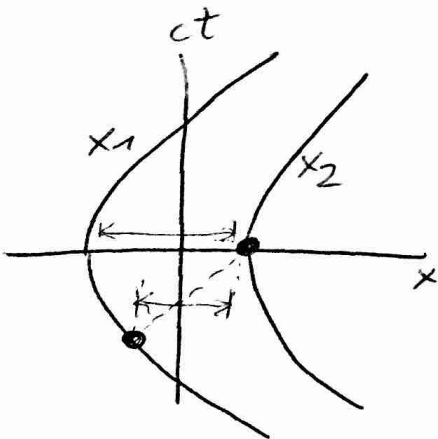
Ziel: $\mathcal{O}(a^1)$ von diesem Ausdruck!
(Also Beschleunigungs-Korrektur des E-Feldes)

Betrachte Feld zum Zeitpunkt $t=0$!

~~$x_1(t)$~~

t_{ret} aus

$$c |t - t_{ret}| = x_2^{(0)} - x_{1ret} = l - \frac{a}{2} \underbrace{(t - t_{ret})^2}_{\Delta t}$$



\Rightarrow in niedrigster Ordnung

$$\Delta t \approx \frac{l}{c}$$

genauer:

$$\Delta t \approx \frac{l}{2c} - \frac{a l^2}{2c^3}$$

$$\Rightarrow x_2(0) - x_{1ret} = l - \frac{a}{2} \frac{l^2}{c^2}$$

$$\beta = \frac{\dot{x}_1(t_{ret})}{c} = \frac{a t_{ret}}{c} \approx \frac{a l}{c^2}$$

$$t_{ret} = -\Delta t \approx -\frac{l}{c}$$

⇒

$$E_2(0) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{(1+2\beta)}_{-2\frac{al}{c^2}} \underbrace{\frac{1}{\left(l - \frac{al^2}{c^2}\right)^2}}_{\approx \frac{1}{l^2 \left[1 - \frac{al}{c^2}\right]}}$$

$$\approx \frac{1}{l^2 \left[1 - \frac{al}{c^2}\right]}$$

$$\approx \frac{1}{l^2} \left[1 + \frac{al}{c^2}\right]$$

$$E_2(0) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l^2} \left(1 - \frac{al}{c^2}\right)$$

→ proportional zu a ✓
 • prop. zu $\frac{1}{l}$ ✓
 • negativ ✓

analog

$$E_1(0) \approx - \dots \left(1 + \frac{al}{c^2}\right)$$

⇒ Gesamtkraft hat Zusatzbeitrag:

$$F_{\text{Selbst}} = q(E_1(0) + E_2(0)) = - \underbrace{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{lc^2} \cdot a \cdot 2}_{\text{das wäre genau der benötigte Term,}} \cdot 2$$

das wäre
genau der
benötigte Term,
 $S_{M_0}^{\text{cone}} \cdot a!$

Aber:

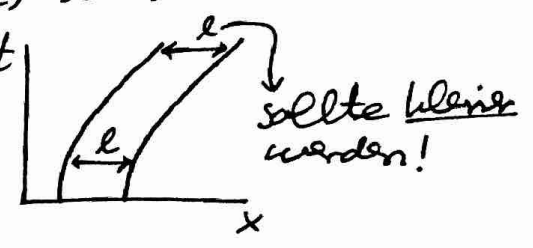
Faktor 2 ? ⚡

Unser Modell ist unvollständig!

Zwei Probleme:

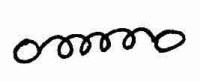
- Coulomb-Ablastung würde zerplatzen lassen! (genauso bei vielen Teilchen)

- Identische Beschleunigung
 leider q hält $x_2(t) - x_1(t) = l$ konstant
 \hookrightarrow zu Lorentzkontraktion!



Lösung: Brauchen attraktive Kraft für Stabilität!
 \Rightarrow Echtes, stabiles, zusammengesetztes Teilchen!

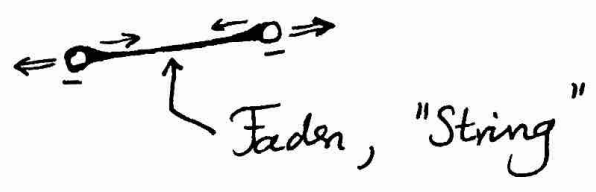
Feder?



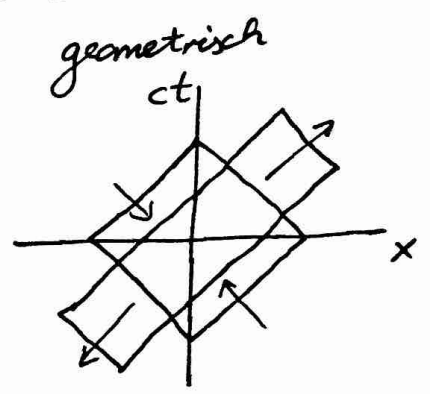
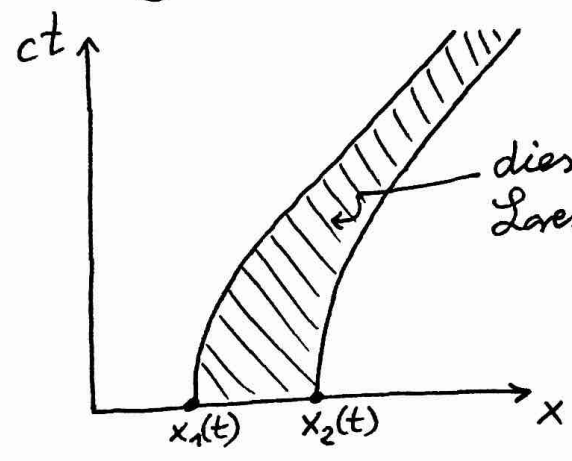
$$F_2^{(t)} = k(x_1^{(t)} - x_2^{(t)})$$

\hookrightarrow instantane Kraftwirkung
 nicht relativistisch!

3.2 Eine relativistische Feder



Wirkung S des Fadens?



⇒ relativistisch korrekter Ansatz:

$$S = -F_s \int (x_2(t) - x_1(t)) dt$$

"mechanische Spannung" des Fadens [Kraft]

Strecken & dehnen
 (um Faktor $\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ bzw. das Inverse)
 ⇒ Fläche konstant ✓

Bem.: Das ist die Wirkung in der Stringtheorie!

(Man könnte auch transversale Auslenkung mitnehmen:

$$S = -F_s \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2} * dx dt$$

"Gesamtlänge"

$$* = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

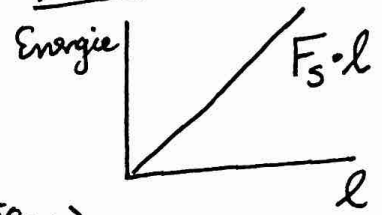
Kraft auf Endpunkte:

$$F_2 = + \frac{\partial L}{\partial x_2} = -F_s$$

$$F_1 = + \frac{\partial L}{\partial x_1} = +F_s$$

Keine Abstandsabhängigkeit!

- anders als nichtrelativistische Feder
- Energie ist linear in Ausdehnung



(auch beobachtet in QCD: "confinement" von quarks)
 ↓
 ist ein Modell für ein Meson!

(Bem.: In Stringtheorie $F_s \sim 10^{50} \text{ N}$)

Gleichgewichtsalustand:

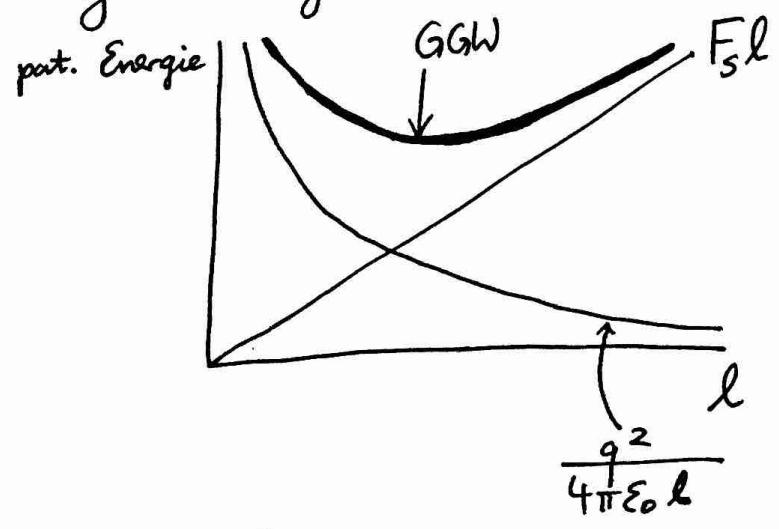


$$qE_2 \stackrel{!}{=} F_s$$

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l^2} = F_s \Rightarrow l \sim \frac{1}{\sqrt{F_s}}$$

(Bem.: Für $l \sim R_{\text{ce}} \sim 10^{-15} \text{ m}$ bräuchten wir $F_s \sim \frac{m_0 c^2}{l} \sim 30 \text{ N}$)

Gesamtenergie:



$$E_{\text{ges}} = E_{\text{caul}} + E_s$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} + F_s l$$

$\approx 2 \cdot E_{\text{caulomb}}$
 wg. Bed. für F_s oben!

$\Rightarrow S m_0^{\text{ges}} = 2 S m_0^{\text{caul}} \Rightarrow$ passt zu berechneter Trägheit aus $F_{\text{selbst}} \sim \ddot{x}$!

Bem.: F_s trägt nicht zu F_{Gesamt} bei,
weil $F_s + (-F_s) = 0$

↑
unabhängig von Bewegung!

⇒ Faden löst alle Probleme ✓

Bem.: Auch die Lorentz-Kontraktion kommt
jetzt korrekt heraus:

für gleichförmige Bewegung

$$x_{1/2}(t) = \mp \frac{l^{\text{Lab}}}{2} + vt$$

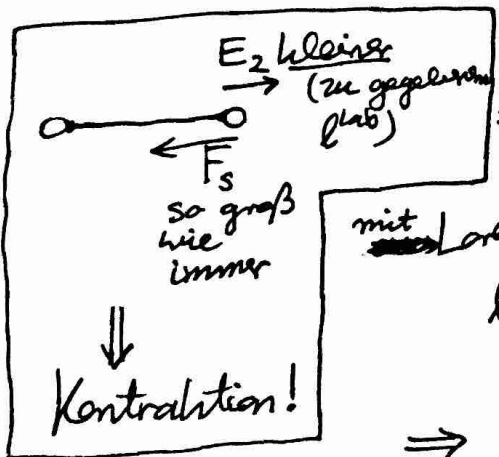
findet man ein reduziertes E-Feld:

$$E_2 = \dots = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{(1-\beta)^2}{(l^{\text{Lab}})^2}$$

s.o.

(haben verwendet: $c \Delta t = l^{\text{Lab}} + v \Delta t$)
⇒ $\Delta t = \frac{l^{\text{Lab}}}{c-v} = \frac{1}{1-\beta} \frac{l^{\text{Lab}}}{c}$

⇒ $E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1-\beta^2)}{(l^{\text{Lab}})^2}$ ist reduziert um $1-\beta^2$



mit Lorentzkontr. Formel:
 $l^{\text{Lab}} = \sqrt{1-\beta^2} l^{\text{bew}}$

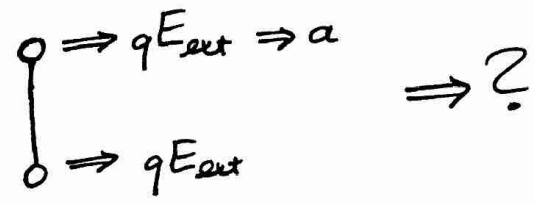
⇒ $l^{\text{bew}} = \underbrace{l_{\text{GGW}}}_{\text{von allen}} = l$

$l^{\text{Lab}} = \sqrt{1-\beta^2} l < l$ ✓

! F_s
damit keine Gesamtkraft auf Teilchen q wirkt und es sich wirklich gleichförmig bewegt!

Also: im mitbewegten Bez. system hat man die normale GGW-Länge! Im Laborsystem sieht man Kontraktion!

~~Beweis~~
 Was passiert, wenn a senkrecht zu Faden?



Aus retardierten E-Feldern:

$$F_{\text{selbst}}^{\text{caul}} = -\frac{2}{3} m_0 \ddot{x}$$

wir brauchen aber auch jetzt Faktor 2, weil die Gesamtenergie weiter

2 · E_{caul} ist (wg. Faden)
 $\Rightarrow S m_0^{\text{ges}} = 2 S m_0^{\text{caul}}$

$\Rightarrow ?$

Lösung:

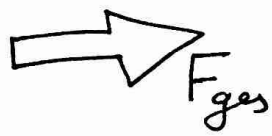
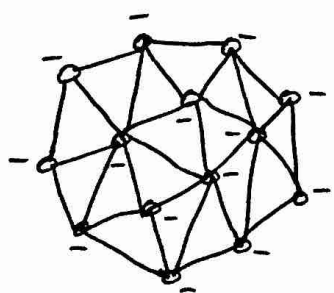


Faden liefert Kraft $\sim a$ in x-Richtung!

$$F_{\text{selbst}}^{\text{Faden}} = F_{\text{selbst}}^{\text{caul}}$$

\Rightarrow insgesamt wieder OK ✓
 $F_{\text{selbst}}^{\text{ges}} = 2 \cdot F_{\text{selbst}}^{\text{caul}} = -\frac{4}{3} m_0^{\text{ges}} \ddot{x}$

Beliebiges Teilchen:



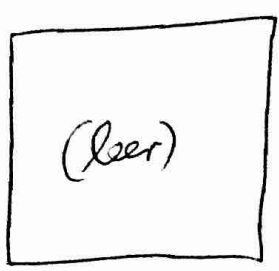
"Durch Fäden zusammengehaltenes Elektron."

$$F_{\text{selbst}} = -\frac{4}{3} m_0 \ddot{x} + \dots$$

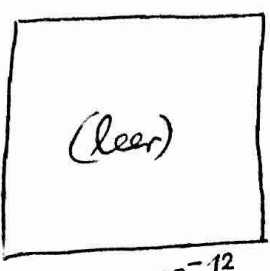
Allg.: Attraktive Kräfte = "Poincaré-Spannung" (die ein e^- zusammenhalten)

Bem.: El. magn. Masse kommt auch in Quantenelektrodynamik (QED) vor, aber die Physik wird verändert

Schnappschüsse des Vakuums, mit immer besserer Orts- & Zeitauflsg.:



$\Delta x \sim 10^{-10} \text{ m}$
 $\Delta t \sim 10^{-15} \text{ s}$



$\Delta x \sim 10^{-12} \text{ m}$
 $\Delta t \sim 10^{-15} \text{ s}$



$\Delta x \sim 10^{-12} \text{ m}$
 $\Delta t \sim 10^{-20} \text{ s}$
 $(= \frac{\Delta x}{c})$

e^- und e^+
Vakuumschwankungen der Ladungsdichte
(analog: von \vec{E} & \vec{B} & \vec{j})

Vakuumschw. sichtbar für $\Delta x < \text{Compton-Wellenlänge}$

$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ "Plancksches Wirkungsquantum"
 $\sim 2 \cdot 10^{-12} \text{ m}$

(& $\Delta t < \frac{\Delta x}{c}$)

\Rightarrow weil $R_{cl} \ll \lambda_c$ werden Quanteneffekte wichtig, bevor man eine mögl. Substruktur des e^- studieren kann!

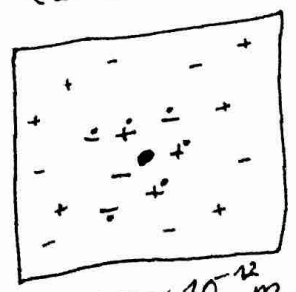
(Bem.: Feinstrukturkonstante

$\alpha = \frac{q^2}{\hbar c} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$
 $\sim \frac{1}{137} \approx 2\pi \frac{\lambda_c}{R_{cl}}$)



$\Delta x \sim 10^{-10} \text{ m}$
 $\Delta t \sim 10^{-15} \text{ s}$

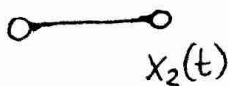
\Rightarrow



$\Delta x \sim 10^{-12} \text{ m}$
 $\Delta t \sim 10^{-20} \text{ s}$

Gegenwärtige Beschreibung: e^- ist Punktteilchen, ist aber auf kleinen Abständen von einer Wolke von e^- & e^+ umgeben
ist auch eine Art Substruktur

4 Strahlungsdämpfung



$$x_{2/1}(t) = \pm \frac{l}{2} + \frac{\dot{a} t^3}{3!}$$

⇒ Terme in E_2 , linear in $\ddot{a} = \ddot{x}$?

$$c \Delta t = x_2(0) - x_1(-\Delta t) = l + \frac{\dot{a}}{3!} \Delta t^3$$

$$\Rightarrow c \Delta t \approx l + \frac{\dot{a}}{3!} \left(\frac{l}{c}\right)^3$$

$$\beta = \frac{\dot{x}_1(-\Delta t)}{c} = \frac{\dot{a}}{2c} (-\Delta t)^2 = \frac{\dot{a} l^2}{2c^3}$$

$$E_2(0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1+\beta}{1-\beta} \frac{1}{(c\Delta t)^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{\dot{a} l^2}{c^3}\right) \cdot \frac{1}{l^2 + \frac{\dot{a} l^4}{3c^3}}$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{\dot{a} l^2}{c^3}\right) \frac{1}{l^2}$$

⇒ Extra-Beitrag zur Kraft:

$$q E_2(0) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{a}}{c^3} \equiv f$$

Aber \triangle $F_{\text{selbst}} = q(S E_1(0) + S E_2(0)) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{a}}{c^3} \downarrow$

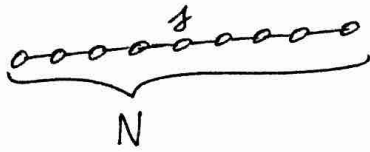
$$-\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{a} l^2}{c^3}\right) \frac{1}{l^2} \quad \text{wg. } \frac{1+\beta}{1-\beta} \Rightarrow \frac{1-\beta}{1+\beta} \cdot (-)$$

Problem: hatten erwartet $\frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{a}}{c^3} \uparrow 4 \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{\dot{a}}{c^3}$
 $Q = 2q$

Grund: Extra-Beiträge von den Einzel-Ladungen!
 (liefern noch einmal 2f)

Besser: Zerlege Q in N Ladungen $q = \frac{Q}{N}$

(76)



"Das Ketten-Elektron?"

für jede der N Ladungen:

$(N-1)$ Beiträge f von den anderen Ladungen

$$\Rightarrow F_{\text{selbst}} = N \cdot (N-1) f \approx N^2 f = \frac{Q^2}{6\pi\epsilon_0} \frac{a}{c^3} \sqrt{\quad}$$

\uparrow
N groß weil $Nq^2 = Q^2$

auch hier ohne
Selbst-WW der
Ladungen q .
Das würde nur
 $N \cdot f$ geben,
unnützig im
Vgl. zu $N^2 f$!

Das korrekte Ergebnis!

Bem.: Auch für andere Geometrien



Bem.: Korrekte Behandlung der attraktiven WW
~~ist~~ unnützig für \ddot{x} -Term!

\Rightarrow robust, weniger
problematisch als S_{mo} !