Lösung Ha. Nr. 4

Normierung:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\psi(x,t=0)|^2 = \mathcal{N}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \mathcal{N}^2 \sqrt{2\pi\sigma^2}$$

$$\longrightarrow \mathcal{N} = (2\pi\sigma^2)^{-1/4}$$

Einsetzen des Ansatzes in die Schrödinger Gleichung:

$$i\hbar \, \partial_t \, \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \, \psi(x,t)$$

$$i\hbar \left(\frac{x^2}{a^2(t)} \dot{a}(t) - \dot{b}(t) \right) \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x \left[-\frac{2x}{a(t)} \psi(x,t) \right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{2}{a(t)} + \frac{4x^2}{a^2(t)} \right] \psi(x,t)$$

$$\rightarrow \left[\frac{x^2}{a^2(t)} \underbrace{\left(i\hbar \dot{a}(t) + 4\frac{\hbar^2}{2m} \right)}_{A} - \underbrace{\left(i\hbar \dot{b}(t) + \frac{\hbar^2}{m\,a(t)} \right)}_{B} \right] \psi(x,t) = 0$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn $A = 0$ und $B = 0$.

<u>A:</u> $\quad \dot{a}(t) = \frac{i\hbar 2}{m} \longrightarrow a(t) = \frac{i2\hbar}{m} t + \text{cte}$

Anfangsbedingung: $a(0) = 4\sigma^2$

$$\longrightarrow \underline{a(t) = 4\sigma^2 + i\frac{2\hbar t}{m}}$$

B: $\dot{b}(t) = \dfrac{i\hbar}{m\,a(t)} = \dfrac{i\hbar}{m\left(4\sigma^2 + i\,\frac{2\hbar t}{m}\right)}$

$$\rightarrow\ b(t) = \frac{1}{2}\ln\left(4\sigma^2 + i\,\frac{2\hbar t}{m}\right) + \text{cte}$$

Anfangsbedingung: $b(0) = 0$

$$b(t) = \frac{1}{2}\left[\ln\left(4\sigma^2 + i\,\frac{2\hbar t}{m}\right) - \ln\left(4\sigma^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\underbrace{1 + i\,\frac{\hbar}{2m\sigma^2}t}_{=\frac{a(t)}{a(0)}}\right)\right]$$

Mit $\ln z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z$ lässt sich das umschreiben als

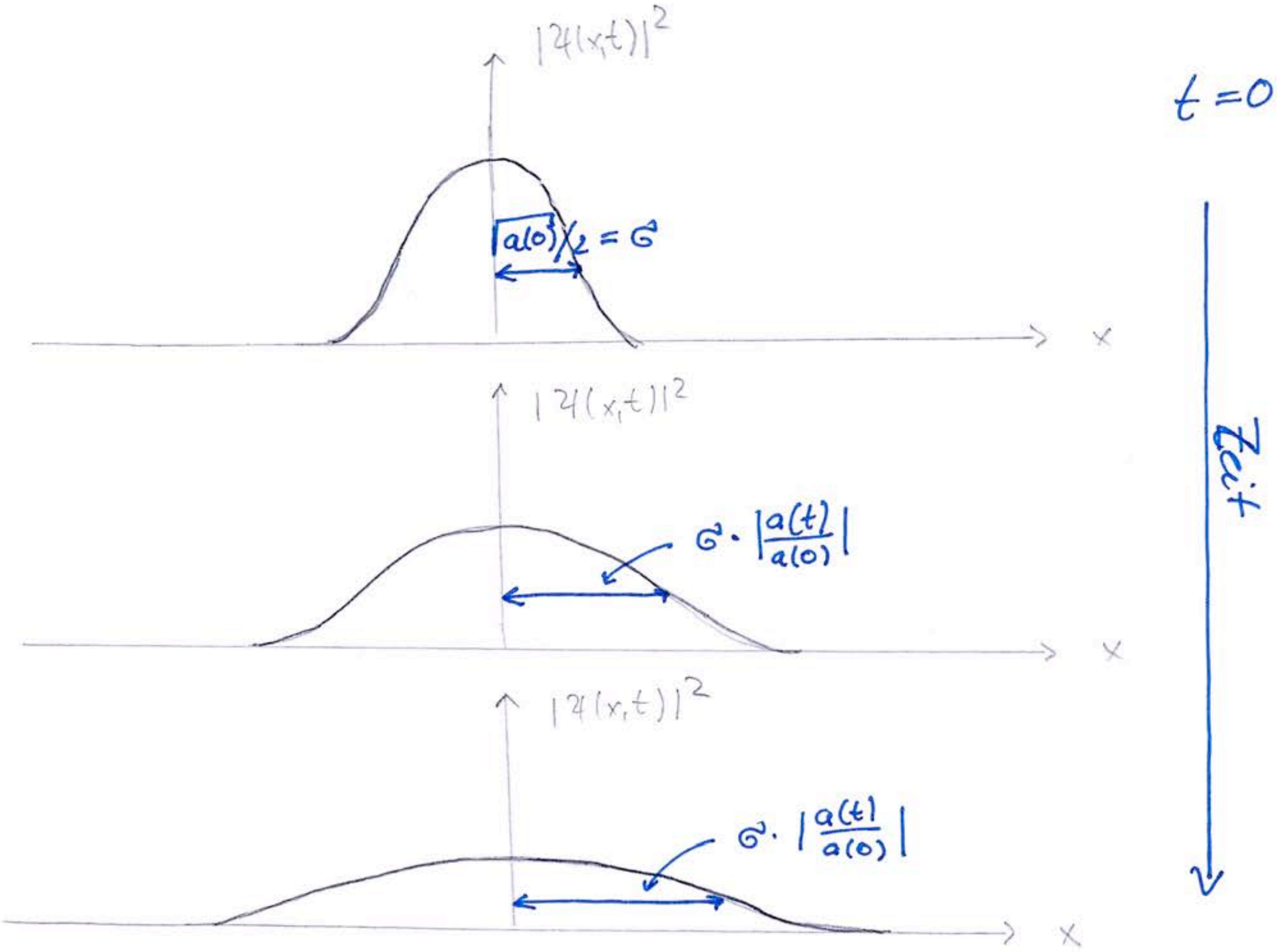
$$b(t) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{a(t)}{a(0)}\right| + \frac{i}{2}\theta(t) \quad ; \quad \tan\theta(t) = \frac{\hbar t}{2m\sigma^2}.$$

$$\rightarrow\ \psi(x,t) = \left(\frac{8\sigma^2}{\pi}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{\left[(4\sigma^2)^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}\right]^{1/4}} \cdot e^{-i\theta(t)/2} \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{4\sigma^2 + i\frac{2\hbar t}{m}}\right\}$$

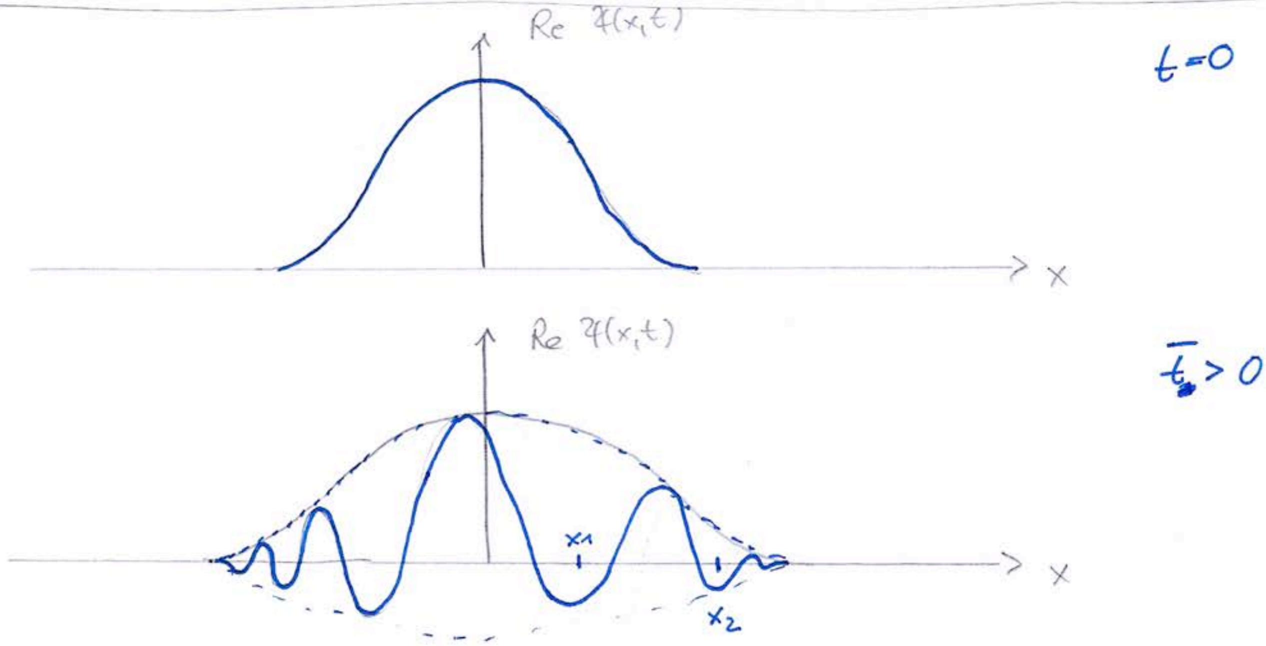
$$|\psi(x,t)|^2 = \left[\frac{8\sigma^2/\pi}{(4\sigma^2)^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right]^{1/2} \exp\left\{-\frac{8\sigma^2 x^2}{(4\sigma^2)^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right\}$$

$$\mathrm{Re}\,\psi(x,t) = \left[\frac{8\sigma^2/\pi}{(4\sigma^2)^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right]^{1/4} \exp\left\{-\frac{4\sigma^2 x^2}{(4\sigma^2)^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}}\right\} \cdot$$

$$\cdot \cos\left[\frac{\frac{2\hbar t}{m}\, x^2}{(4\sigma^2)^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}} - \theta(t)/2 \right]$$



Die Dichte bleibt Gauß-verteilt, nur die Breite wächst mit der Zeit an.



Der Anfangszustand ist eine Überlagerung ebener Wellen mit unterschiedlichen Impulsen p (Gauß-verteilt um $p_0 = 0$).

In einer semiklassischen Betrachtung erreichen nur die Komponenten x_1 bzw. x_2 zur Zeit $\bar{t}$, für die $p \approx m \frac{x_{1,2}}{\bar{t}}$ gilt.

Dem Impuls p ist die De-Broglie Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p}$ zugeordnet.

→ Wir erwarten kleinere Wellenlängen für größere x.

Formaler:

Betrachte für festes t zwei aufeinanderfolgende Maxima von $\mathrm{Re}\,\psi(x,t)$.

Es muss gelten: Position des 2. und 1. Maximum

$$\frac{\frac{2\hbar t}{m}(x_0+\Delta x)^2}{(4\sigma^2)^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}} = \frac{\frac{2\hbar t}{m} x_0^2}{(4\sigma^2)^2 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}} + 2\pi$$

Für $\frac{4\hbar^2 t^2}{m} \gg (4\sigma^2)^2$ und $\Delta x \ll x_0$ gilt:

$$\frac{2\,\Delta x \cdot x_0}{\frac{2\hbar t}{m}} = 2\pi \quad \rightarrow \quad \Delta x = \frac{h}{m\, x_0/t} = \lambda$$

De-Broglie Wellenlänge eines Teilchens, das in der Zeit t die Strecke x_0 zurücklegt