3. Lineare Antwort eines harmonischen Oszillators

Für den ungestörten harmonischen Oszillator gibt

$$x_I(t) = \hat{x}(0)\cos(\omega t) + \frac{1}{m\omega}\sin(\omega t)\,\hat{p}(0).$$

[Siehe: Blatt 3 Präsenzübung 2]

Nun wirke die zusätzliche Kraft $F(t)$ auf den harmonischen Oszillator $\longrightarrow \hat{H} = \hat{H}_{\text{harm. Osz.}} - F(t)\,\hat{x}(t)$.

Die Antwort des Oszillators auf die Kraft ist

$$\delta\langle\hat{x}_I(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t}\langle[\hat{x}_I(t), -F(t')\,\hat{x}_I(t')]\rangle\,dt'$$

$$= \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\,\langle[\hat{x}(0)\cos(\omega t) + \frac{1}{m\omega}\sin(\omega t)\,\hat{p}(0),\ \hat{x}(0)\cos(\omega t') + \frac{1}{m\omega}\sin(\omega t')\,\hat{p}(0)]\rangle\,F(t')$$

$$= \frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\,F(t')\left(\frac{\cos(\omega t)\sin(\omega t')}{m\omega} - \frac{\sin(\omega t)\cos(\omega t')}{m\omega}\right)\underbrace{\langle[\hat{x}(0),\hat{p}(0)]\rangle}_{i\hbar}$$

$$= -\frac{1}{m\omega}\int_{-\infty}^{t}dt'\,F(t')\,\underbrace{[\cos(\omega t)\sin(\omega t') - \sin(\omega t)\cos(\omega t')]}_{\sin[\omega(t'-t)]}$$

$$= \frac{1}{m\omega}\int_{-\infty}^{t}dt'\,\sin[\omega(t-t')]\,F(t')$$

$$\rightarrow \langle\hat{x}(t)\rangle = \langle\hat{x}(0)\rangle\cos(\omega t) + \frac{1}{m\omega}\sin(\omega t)\langle\hat{p}(0)\rangle + \frac{1}{m\omega}\int_{-\infty}^{t}dt'\,\sin[\omega(t-t')]\,F(t')$$

Die Zeitentwicklung der mittleren Auslenkung $\langle \hat{x}(t) \rangle$ ist gleich der Auslenkung des klassischen Oszillators.

Führt man die Schritte in Präsenzübung 2(b) Blatt 3 für den klassischen harmonischen Oszillator aus, so erhält man:

$$x(t) = \underbrace{x(0)\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\sin(\omega t)}_{\text{hom. Lösung}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dt'\, F(t')\, \mathcal{G}(t,t')}_{\text{spez. Lösung}},$$

mit der Green's Funktion

$$\mathcal{G}(t,t') = \frac{1}{m\omega}\, \theta(t-t')\, \sin[\omega(t-t')] .$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, F(t')\, \mathcal{G}(t,t') = \frac{1}{m\omega} \int_{-\infty}^{t} dt'\, F(t')\, \sin[\omega(t-t')]$$

Blatt 12: Hausaufgaben

4. Präzession eines Spins

(a.) Heisenberg-Bewegungsgleichung: $\frac{d}{dt}\hat{A} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{A}]$

Hier ist $\hat{H} = \vec{b}\cdot\hat{\vec{S}} = \omega\hat{S}_z$.

$$\frac{d}{dt}\hat{S}_z(t) = \frac{i}{\hbar}\omega[\hat{S}_z(t),\hat{S}_z(t)] = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{S}_z(t) = \hat{S}_z(0)$$

$$(*)\ \frac{d}{dt}\hat{S}_x(t) = \frac{i}{\hbar}\omega[\hat{S}_z(t),\hat{S}_x(t)] = \frac{i}{\hbar}\omega\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\underbrace{[\hat{\sigma}_z(t),\hat{\sigma}_x(t)]}_{=2i\hat{\sigma}_y(t)} = \underline{-\omega\hat{S}_y(t)}$$

$$(**)\ \frac{d}{dt}\hat{S}_y(t) = \frac{i}{\hbar}\omega[\hat{S}_z(t),\hat{S}_y(t)] = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\frac{i}{\hbar}\omega\underbrace{[\hat{\sigma}_z(t),\hat{\sigma}_y(t)]}_{-2i\hat{\sigma}_x(t)} = \underline{\omega\hat{S}_x(t)}$$

(b.) Durch Einsetzen des Ansatz ergibt sich

$$(*)\quad -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{S}_x(0) + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{S}_y(0) = -\omega[\cos\varphi\,\hat{S}_y(0) - \sin\varphi\,\hat{S}_x(0)]$$

$$(**)\quad -\dot{\varphi}\sin\varphi\,\hat{S}_y(0) - \dot{\varphi}\cos\varphi\,\hat{S}_x(0) = \omega[\cos\varphi\,\hat{S}_x(0) + \sin\varphi\,\hat{S}_y(0)]$$

$$\rightarrow\quad \dot{\varphi} = -\omega \quad \Longrightarrow \quad \underline{\varphi = -\omega t}$$

(c.) $$\underline{e^{i\theta\hat{S}_z/\hbar}\,\hat{S}_x\,e^{-i\theta\hat{S}_z/\hbar}} = e^{i\hat{H}(\frac{\theta}{\omega})/\hbar}\,\hat{S}_x\,e^{-i\hat{H}(\frac{\theta}{\omega})/\hbar}$$

$$= \hat{S}_x\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = \underline{\cos(-\theta)\,\hat{S}_x(0) + \sin(-\theta)\,\hat{S}_y(0)}$$