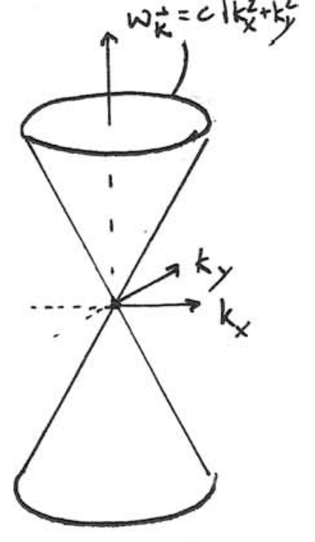
3. Dirac-Gleichung in Graphen

$$i\hbar\,\partial_t \begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0c^2 & -i\hbar c\,(\partial_x - i\partial_y) \\ -i\hbar c\,(\partial_x + i\partial_y) & -m_0c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_+\\ \psi_-\end{pmatrix}$$

a) Ansatz : $\psi(x,y,t) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega_{\vec k}t}\begin{pmatrix}\phi_{\vec k,+}\\ \phi_{\vec k,-}\end{pmatrix}$



$(m_0 = 0)$

$$\Rightarrow \hbar\,\omega_{\vec k}\begin{pmatrix}\phi_{\vec k,+}\\ \phi_{\vec k,-}\end{pmatrix} = \hbar c\begin{pmatrix} 0 & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{\vec k,+}\\ \phi_{\vec k,-}\end{pmatrix}$$

Bestimmung der Eigenwerte: $\omega_{\vec k}^2 - c^2(k_x^2 + k_y^2) \stackrel{!}{=} 0$

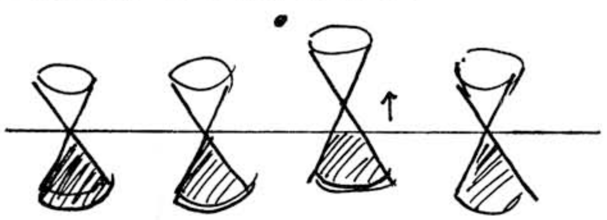
$$\rightarrow \omega_{\vec k} = \pm c\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Die Koeffizienten der Eigenfunktionen bestimmen sich aus

$$\begin{aligned} \omega_k \phi_{\vec k,+} &= c(k_x - ik_y)\,\phi_{\vec k,-} \\ \omega_k \phi_{\vec k,-} &= c(k_x + ik_y)\,\phi_{\vec k,+} \end{aligned} \Rightarrow \phi_{\vec k,+} = \frac{c(k_x - ik_y)}{\omega_{\vec k}}\,\phi_{\vec k,-}$$

b) Erhöht man das chemische Potential, so füllt sich der Kegel mit positiver Energie und man erhält einen Überschuss an Elektronen. Senkt man das chem. Potential, ergibt sich ein Überschuss an Löchern.

Legt man an einer Stelle der Probe eine negative Spannung an, werden Elektronen verdrängt und der Diracpunkt liegt nun oberhalb des chemischen Potentials:



c) Für $m_0 \neq 0$ erhält man das Eigenwertproblem

$$\hbar \omega_{\vec{k}} \begin{pmatrix} \varphi_{+,\vec{k}} \\ \varphi_{-,\vec{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 c^2 & \hbar c\,(k_x - i k_y) \\ \hbar c\,(k_x + i k_y) & -m_0 c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{+,\vec{k}} \\ \varphi_{-,\vec{k}} \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte ergeben sich als

$$\hbar \omega_{\vec{k}} = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + \hbar^2 c^2 (k_x^2 + k_y^2)}$$

und die Koeffizienten der Eigenvektoren als

$$\varphi_{+,\vec{k}} = \frac{\hbar c\,(k_x - i k_y)}{\hbar \omega_k - m_0 c^2}\, \varphi_{-,\vec{k}} \quad , \text{ bzw. } \varphi_{-,\vec{k}} = \frac{\hbar c\,(k_x + i k_y)}{\hbar \omega_k + m_0 c^2}\, \varphi_{+,\vec{k}}$$