Lösung Blatt 6 - Hausaufgabe

3. Sterne messen

Wir benutzen, dass

$$\langle \hat{a}^+_{\ell_1}(t)\hat{a}_{\ell_1}(t)\ \hat{a}^+_{\ell_2}(t)\ \hat{a}_{\ell_2}(t)\rangle = \langle \hat{a}^+_{\ell_1}(t)\ \hat{a}^+_{\ell_2}(t)\ \hat{a}_{\ell_1}(t)\ \hat{a}_{\ell_2}(t)\rangle + \delta_{\ell_1,\ell_2}\langle \hat{a}^+_{\ell_1}(t)\hat{a}_{\ell_1}(t)\rangle$$

bekannt aus Präsenzübung 2 (keine Interferenzterme)

Im folgenden betrachten wir nur den ersten Term:

$$\langle \hat{a}^+_{\ell_1}(t)\ \hat{a}^+_{\ell_2}(t)\ \hat{a}_{\ell_1}(t)\ \hat{a}_{\ell_2}(t)\rangle$$

$$= \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4} G^*(\ell_1-k_1,t)\ G^*(\ell_2-k_2,t)\ G(\ell_1-k_3,t)\ G(\ell_2-k_4,t)\ \langle \hat{a}^+_{k_1}\ \hat{a}^+_{k_2}\hat{a}_{k_3}\ \hat{a}_{k_4}\rangle$$

[Da $|\psi(0)\rangle = \hat{a}^+_{j_1}\hat{a}^+_{j_2}|0\rangle$ mit $j_1 \neq j_2$, ist

$$\langle \hat{a}^+_{k_1}\ \hat{a}^+_{k_2}\ \hat{a}_{k_3}\ \hat{a}_{k_4}\rangle = \left(\delta_{k_1,j_1}\delta_{k_2,j_2}+\delta_{k_1,j_2}\delta_{k_2,j_1}\right)\cdot\left(\delta_{k_3,j_1}\delta_{k_4,j_2} + \delta_{k_3,j_2}\delta_{k_4,j_1}\right)$$]

$$= \left(G^*(\ell_1-j_1,t)G^*(\ell_2-j_2,t) + G^*(\ell_1-j_2,t)\ G^*(\ell_2-j_1,t)\right)$$

$$\cdot\left(G(\ell_1-j_1,t)\ G(\ell_2-j_2,t) + G(\ell_1-j_2,t)\,G(\ell_2-j_1,t)\right)$$

$$= |G(\ell_1-j_1,t)|^2|G(\ell_2-j_2,t)|^2 + |G(\ell_1-j_2,t)|^2|G(\ell_2-j_1,t)|^2$$

$$\left.\begin{aligned} &+ G^*(\ell_1-j_1,t)\ G^*(\ell_2-j_2,t)\ G(\ell_1-j_2,t)\ G(\ell_2-j_1,t)\\ &+ G^*(\ell_1-j_2,t)\ G^*(\ell_2-j_1,t)\ G(\ell_1-j_1,t)\ G(\ell_2-j_2,t)\end{aligned}\right\}\ \text{enthalten Interferenzen}$$

4. Propagation eines Ein-Phononen (Photonen)-Zustands

(a) Gesucht ist der Propagator $G(\ell,j;t)$ mit

$$\hat{a}_\ell(t) = \sum_j G(\ell,j;t)\,\hat{a}_j(0)$$

(Siehe Skript S. 48)

Wir nehmen an, dass $\tilde{H}$ in den Operatoren $\hat{b}_k = \sum_k U_{k\ell}\,\hat{a}_\ell$ diagonal ist. Hierbei ist U eine unitäre Matrix ($UU^+ = \mathbb{1}$) und $\Delta = U\tilde{H}U^+$ ist diagonal.

$$\rightarrow \hat{a}_\ell(t) = \sum_k [U^+]_{\ell k}\,\hat{b}_k(t)$$

$$= \sum_k [U^+]_{\ell k}\, e^{-i\Delta_{kk}t/\hbar}\,\hat{b}_k(0)$$

$$= \sum_{kj} [U^+]_{\ell k}\, e^{-i\Delta_{kk}t/\hbar}\, U_{kj}\,\hat{a}_j(0)$$

Aufgrund von $\Delta = U\tilde{H}U^+$ gilt $\sum_k [U^+]_{\ell k}\,\Delta_{kk}\,U_{kj} = \tilde{H}_{\ell j}$.

Zudem gilt für eine unitäre Matrix U:

$$U^+ e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,U = U^+\Big(1 - \frac{it}{\hbar}\hat{H} - \frac{t^2}{2\hbar^2}\underbrace{\hat{H}\ \hat{H}}_{\text{setze Identität ein } U^+U^+ = \mathbb{1}} + \dots\Big)U$$

$$= e^{-i(U^+\hat{H}U)t/\hbar}$$

$$\rightarrow \underline{\hat{a}_\ell(t) = \sum_j \underbrace{\Big[e^{-i\tilde{H}t/\hbar}\Big]_{\ell j}}_{G(\ell,j;t)}\,\hat{a}_j(0)}$$

<u>Bemerkung</u>: In der Vorlesung (Skript S. 48) sind U_{kj} und $[U^+]_{\ell k}$ gegeben durch:

$$U_{kj} = e^{-ikj}/\sqrt{N}$$

$$[U^+]_{\ell k} = e^{ik\ell}/\sqrt{N}$$

b.) Aus der Darstellung in a.) folgt, dass der Propagator wie der Zeitentwicklungsoperator unitär ist und $G^+(l,j;t) = G(l,j;-t)$ gilt.

$$\rightarrow \sum_j G(l,j;-t)\,G(j,m;t) = \sum_j G^+(l,j;t)\,G(j,m;t) \underset{\uparrow}{=} \delta_{em}$$

Unitarität

c.) $$|\psi(0)\rangle = \sum_j \psi_j\,\hat{a}_j^+\,|0\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \sum_j \psi_j\,\hat{a}_j^+\,|0\rangle$$

$$= \sum_j \psi_j\, e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{a}_j^+ \;|0\rangle$$

füge $e^{+i\hat{H}t/\hbar}\,e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \mathbb{1}$ ein

$$= \sum_j \psi_j\,\underbrace{e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,\hat{a}_j^+\,e^{+i\hat{H}t/\hbar}}_{a_j^+(-t)}\,\underbrace{e^{-i\hat{H}t/\hbar}\,|0\rangle}_{=|0\rangle}$$

Mit der Formel aus Teil a.)

$$\hat{a}_e(t) = \sum_{j'} \left[e^{-i\hat{H}t/\hbar}\right]_{ej'} \hat{a}_{j'}(0) \;\longrightarrow\; \hat{a}_e^+(t) = \sum_{j'} \hat{a}_{j'}^+(0)\left[e^{+i\hat{H}t/\hbar}\right]_{j'e}$$

ergibt sich

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{j'} \underbrace{\sum_j \psi_j\,\underbrace{\left[e^{-i\hat{H}t/\hbar}\right]_{j'j}}_{G(j',j;t)}}_{\psi_{j'}(t)}\;\hat{a}_{j'}^+\;|0\rangle$$