Lösung Nr. 1

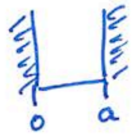
Erinnerung:

- Teilchen im harmonischen Oszillator: $V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$E_n = \hbar\omega\,[n + 1/2]$ $\longrightarrow$ Energieniveaus äquidistant

$\longrightarrow$ ω hängt von der Krümmung von V ab

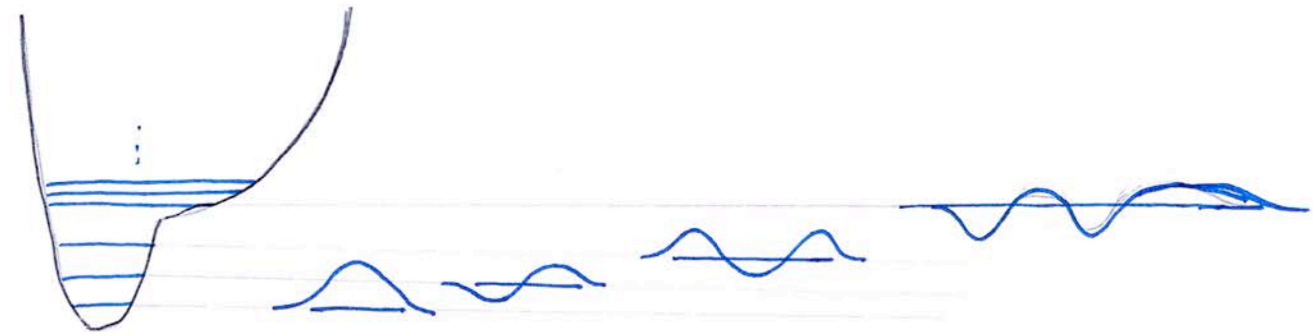
$\longrightarrow$ ψ_n sind Hermite-Funktionen

- Teilchen im (unendliche hohen) Kastenpotential 

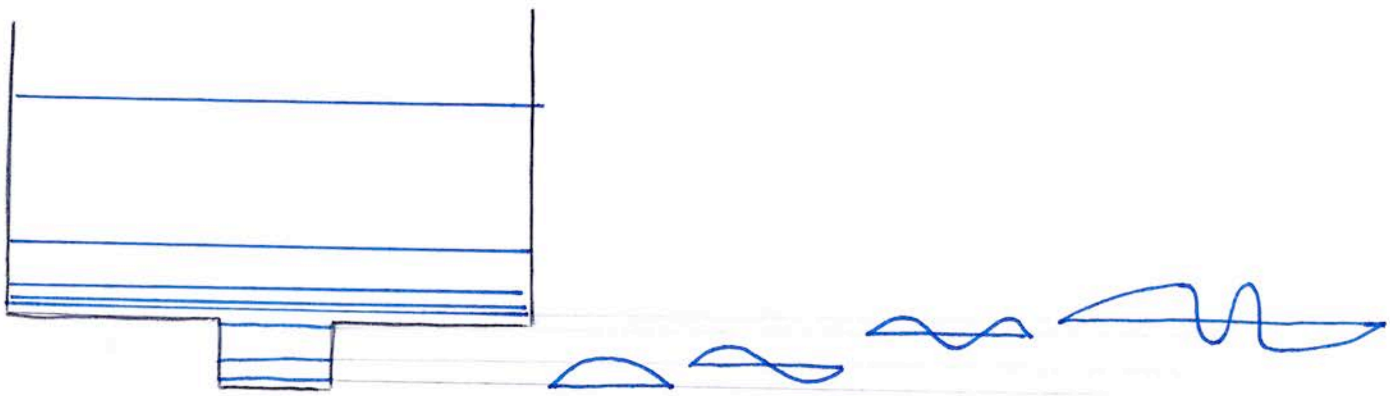
$E_n = n^2 \frac{h}{8ma^2}$, $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\, \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

$\hookrightarrow$

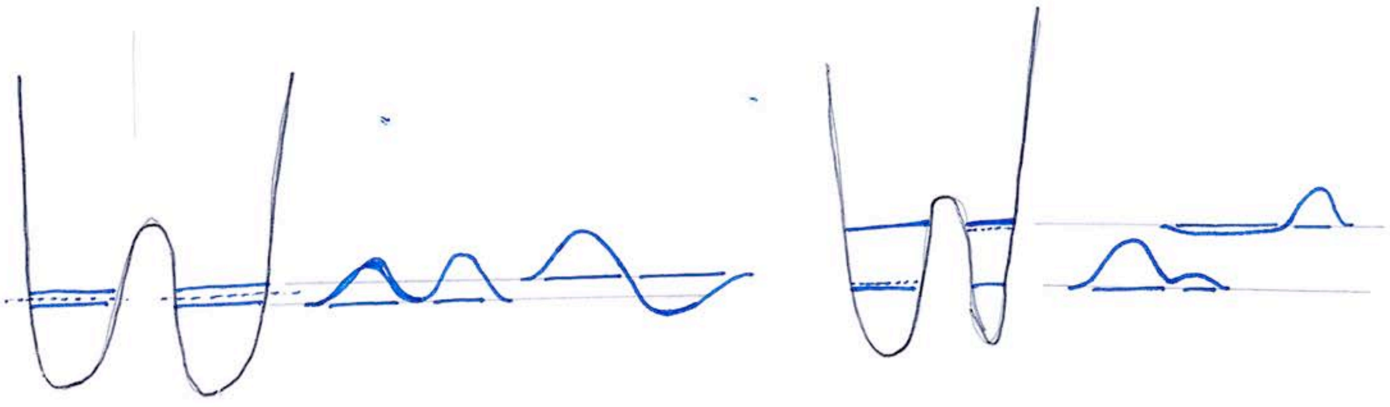
(i)



(iii)



(ii)



Anmerkung:

Auch für allgemeinere Potentiale $V(x)$ gelten die Knotensätze:

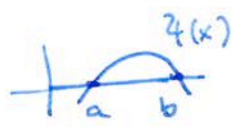
(i) Seien a, b benachbarte Nullstellen der reellen Eigenfunktion $\psi(x)$ zur Energie E. Jede andere Eigenfunktion $\tilde{\psi}(x)$ mit Energie $\tilde{E} > E$ besitzt mindestens einen Knoten zwischen a, b.

(ii) Der Grundzustand ψ_0 besitzt keinen Knoten, der ℓ-te angeregte Zustand hat genau ℓ Knoten.

Beweis-Skizze für (i):

Annahme: $\tilde{\psi}$ hat keinen Knoten in (a,b); o.B.d.A

$\psi(x) > 0$, $\tilde{\psi}(x) > 0$ $\quad a < x < b \quad \rightarrow \quad \psi'(a) > 0$, $\psi'(b) < 0$



$\psi, \tilde{\psi}$ sind Lösungen der Schrödinger Gleichung

$$-\tilde{\psi}'' + (V(x) - \tilde{E}) \frac{2m}{\hbar^2} \tilde{\psi} = 0 \qquad | \cdot \psi$$

$$-\psi'' + (V(x) - E) \frac{2m}{\hbar^2} \psi = 0 \qquad | \cdot \tilde{\psi}$$

$$\rightarrow -\tilde{\psi}''\psi + \tilde{\psi}\psi'' - \frac{2m}{\hbar^2}(\tilde{E} - E)\tilde{\psi}\psi = 0$$

Partielle Integration:

$$\underbrace{-\tilde{\psi}'\psi\Big|_a^b}_{=0} + \underbrace{\tilde{\psi}\psi'\Big|_a^b}_{<0} = \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(\tilde{E} - E)\int_a^b dx\, \tilde{\psi}(x)\psi(x)}_{>0} \qquad \lightning$$

Details: Siehe Rollnik "Quantentheorie 1"

Lösung Nr. 2

Für ein freies, nicht-relativistisches Teilchen ist:

- $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}$

- $\vec{v}_{gr} = \partial_{\vec{k}}\, \omega = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$

Allgemeiner Fall:

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 = |\psi_1(\vec{r},t) + \psi_2(\vec{r},t)|^2$$

$$= |\psi_1(\vec{r},t)|^2 + |\psi_2(\vec{r},t)|^2 + \underbrace{\psi_1(\vec{r},t)\,\psi_2^*(\vec{r},t) + \psi_1^*(\vec{r},t)\,\psi_2(\vec{r},t)}_{\text{verursacht Interferenz}}$$

$$\psi_1(\vec{r},t)\,\psi_2^*(\vec{r},t) + \psi_1^*(\vec{r},t)\,\psi_2(\vec{r},t)$$

$$= \phi(\vec{r}-\vec{v}_1 t-\vec{R}_1)\,\phi(\vec{r}-\vec{v}_2 t-\vec{R}_2)\underbrace{\left[e^{i(\vec{k}_1\vec{r}-\omega_1 t)}\, e^{-i(\vec{k}_2\vec{r}-\omega_2 t)} + h.c.\right]}$$

$$= 2\cos\left[(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{r} - (\omega_1-\omega_2)t\right]$$

"Überlapp der Gaussglocken"

Interferenzmuster

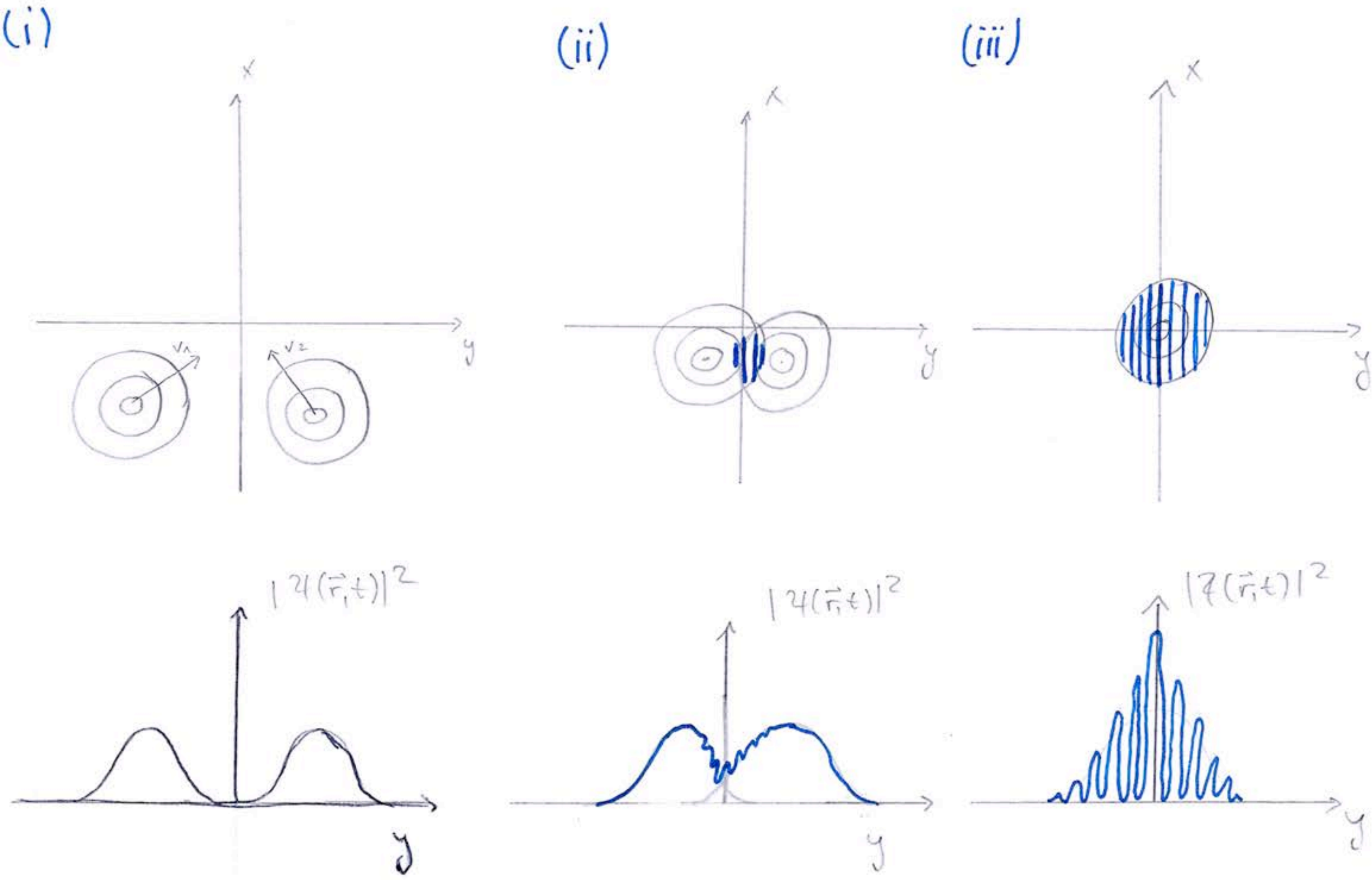
$\longrightarrow$ Interferenzmuster ist identisch in einer Ebene $\perp (\vec{k}_1-\vec{k}_2)$

$\longrightarrow$ Abstand der Interferenzmaxima : $\frac{2\pi}{|\vec{k}_1-\vec{k}_2|}$

In 2 Dimensionen:

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 = \phi^2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \frac{\hbar t}{m}\begin{pmatrix}k_x\\k_y\end{pmatrix}\right) + \phi^2\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \frac{\hbar t}{m}\begin{pmatrix}k_x\\-k_y\end{pmatrix}\right)$$

$$+ \phi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \frac{\hbar t}{m}\begin{pmatrix}k_x\\k_y\end{pmatrix}\right)\phi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \frac{\hbar t}{m}\begin{pmatrix}k_x\\-k_y\end{pmatrix}\right)\cdot 2\cos\left(2k_y\cdot y\right)$$

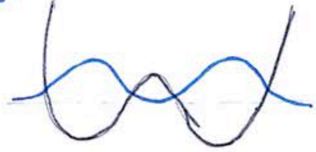


Bei der Abschwächung eines Wellenpakets, verringert sich die Amplitude des Interferenzterms. Im Fall des völligen Überlapps (iii) gibt es dann keine vollständige destruktive Interferenz.

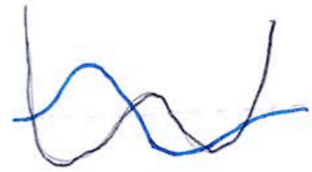
Lösung Nr. 3

Da es sich um ein symmetrisches Potential handelt:

Grundzustand: $|+\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}(|L\rangle + |R\rangle)$



erster angeregter Zustand: $|-\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}(|L\rangle - |R\rangle)$



Normierung $\mathcal{N}$ ergibt sich aus $|\langle +|+\rangle|^2 = 1$, $|\langle -|-\rangle|^2 = 1$ unter Zuhilfenahme der Orthonormalität von $|L\rangle, |R\rangle$.

$$|\langle +|+\rangle|^2 = \frac{1}{\mathcal{N}^2}\Big[\underbrace{\langle L|L\rangle}_{1} + \underbrace{\langle R|R\rangle}_{1} + \underbrace{\langle L|R\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle R|L\rangle}_{=0}\Big] \overset{!}{=} 1$$

$\underline{\mathcal{N} = \sqrt{2}}$.

Analog für $|\langle -|-\rangle|^2$.

- Ein Verschieben des Energie-Nullpunkts führt nur zu einer globalen Phase in der Wellenfunktion.

- Die Energieaufspaltung verringert sich mit ~~mit~~ kleinerer Tunnelwahrscheinlichkeit, d.h. mit breiter werdenden Potentialbarriere.

- Die Energieaufspaltung lässt sich durch die WKB-Näherung berechnen.

⌈Dieses Beispiel ist ausführlich in Landau Lifshitz Vol 3, § 50 Problem 3 vorgerechnet.⌋

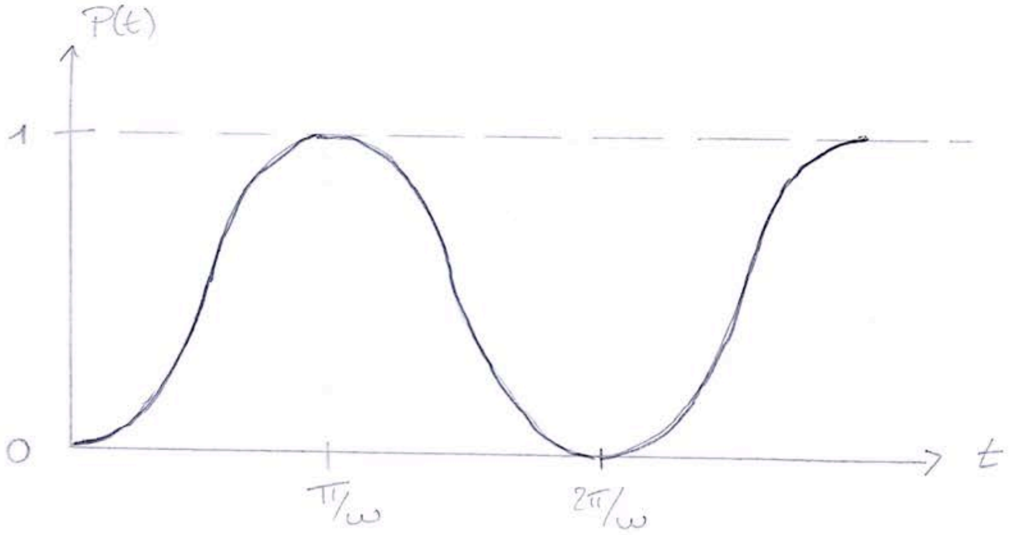
Wahrscheinlichkeit das Teilchen in der linken Mulde zu finden:

$$P(t) = |\langle L | \psi(t) \rangle|^2 = |\langle L | e^{-i\hat{H}t/\hbar} | R \rangle|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\langle + | + \langle - | \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle - e^{-i\omega t} |-\rangle \right) \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{2} \left(1 - e^{-i\omega t} \right) \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{2} e^{-i\omega t/2} \left(e^{i\omega t/2} - e^{-i\omega t/2} \right) \right|^2 = \underline{\sin^2(\omega t/2)}$$



Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens oszilliert zwischen linker und rechter Mulde mit Kreisfrequenz ω.