Lösungen Blatt 6 - Präsenzaufgaben

1 Korrekturen zur Rotating wave approximation

$\hat{x}_{1,2}$ und $\hat{p}_{1,2}$ lassen sich durch die neuen Koordinaten und Impulse ausdrücken als

$$\hat{x}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{X}_+ \pm \hat{X}_-\right) \quad , \quad \hat{p}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{P}_+ \pm \hat{P}_-\right) .$$

Damit ergibt sich für den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) - K\hat{x}_1\hat{x}_2$$

$$= \frac{1}{4m}\left(\left[\hat{P}_+ + \hat{P}_-\right]^2 + \left[\hat{P}_+ - \hat{P}_-\right]^2\right) + \frac{m\omega^2}{4}\left(\left[\hat{X}_+ + \hat{X}_-\right]^2 + \left[\hat{X}_+ - \hat{X}_-\right]^2\right)$$

$$- \frac{K}{2}\left[\hat{X}_+ + \hat{X}_-\right]\left[\hat{X}_+ - \hat{X}_-\right]$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\hat{P}_+^2 + \hat{P}_-^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(\hat{X}_+^2 + \hat{X}_-^2\right) - \underbrace{\frac{K}{2}\left(\hat{X}_+^2 - \hat{X}_-^2\right)}_{\text{es wurde benutzt, dass } \hat{X}_+\hat{X}_- = \hat{X}_-\hat{X}_+}$$

$$= \frac{1}{2m}\hat{P}_+^2 + \frac{m\overbrace{\left(\omega^2 - K/m\right)}^{\Omega_+^2 :=}}{2}\hat{X}_+^2 + \frac{1}{2m}\hat{P}_-^2 + \frac{m\overbrace{\left(\omega^2 + K/m\right)}^{\Omega_-^2 :=}}{2}X_-^2$$

→ Die Eigenfrequenzen sind:

$$\underline{\Omega_\pm = \sqrt{\omega^2 \mp K/m}} \qquad \left(\omega^2 \geq K/m\right)$$

Es gilt also $\omega^2 = \Omega_+^2 + K/m$, das bedeutet für eine Federkopplung $\frac{K}{2}(\hat{x}_1-\hat{x}_2)^2$ bei der sich

ω wie $\omega^2 = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fest}}}{\tilde{\omega}^2} + K/m$ verhält, dass Ω_+ konstant ist.

Die Kopplungsfrequenz g wurde definiert als

$$\hbar g := K\, x_{zPF}^2 \longrightarrow g = \frac{K}{2m\omega}$$ (Skript S. 34)

$$\Omega_\pm = \sqrt{\omega^2 \mp K/m} = \omega\sqrt{1 \mp \frac{K}{m\omega^2}} = \omega\sqrt{1 \mp \frac{2g}{\omega}}$$

$$= \omega\Big(\underbrace{1 \mp \frac{g}{\omega}}_{\text{RWA Ergebnis}} \underbrace{- \frac{1}{2}\left(\frac{g}{\omega}\right)^2}_{\text{Korrektur}} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{g}{\omega}\right)^3\right)\Big)$$

$$\hat{a}_+ = \frac{1}{2\,X_{+,zPF}}\left(\hat{X}_+ + i\,\frac{\hat{P}_+}{m\Omega_+}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\,X_{+,zPF}}\left(\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \frac{i}{m\Omega_+}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\,X_{+,zPF}}\left(x_{zPF}\left(\hat{a}_1 + \hat{a}_1^+ + \hat{a}_2 + \hat{a}_2^{2}\right) + \frac{\omega}{\Omega_+}x_{zPF}\left(\hat{a}_1 - \hat{a}_1^+ + \hat{a}_2 - \hat{a}_2^+\right)\right)$$

mit $x_{zPF} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$, $X_{+,zPF} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega_+}}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\Omega_+}{\omega}\right)^{1/2}\left\{\left(1 + \frac{\omega}{\Omega_+}\right)(\hat{a}_1 + \hat{a}_2) + \left(1 - \frac{\omega}{\Omega_+}\right)(\hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+)\right\}$$

mit $\hat{a}_+^{RWA} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + \hat{a}_2)$, $(\hat{a}_+^{RWA})^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1^+ + \hat{a}_2^+)$

$$\hat{a}_+ = \frac{1}{2}\sqrt{\Omega_+/\omega}\left[(1+\omega/\Omega_+)\,\hat{a}_+^{RWA} + (1-\omega/\Omega_+)\,(\hat{a}_+^{RWA})^+\right]$$

2. Keine Interferenz zwischen zwei einzelnen Phononen

Der Propagator $G(l-j,t)$ gibt die Amplitude dafür an, dass eine Anregung von j nach l propagiert, in der Zeit t.

(1)

$$\hat{a}_l(t) = \sum_j G(l-j,t)\,\hat{a}_j(0)$$

$$\rightarrow \langle \hat{a}_l(t)\rangle = \sum_j G(l-j,t)\,\langle\psi(0)|\,\hat{a}_j\,|\psi(0)\rangle$$

$$= \sum_j G(l-j,t)\,\underbrace{\langle 0|\,\hat{a}_{j_2}\hat{a}_{j_1}\,\hat{a}_j\,\hat{a}_{j_1}^+\hat{a}_{j_2}^+\,|0\rangle}_{=0,\ \text{da}\ \#\ \text{Erzeuger} \neq \#\ \text{Vernichter}} = 0$$

(2.)

$$\langle \hat{a}_l^+(t)\,a_l(t)\rangle = \langle\psi(0)|\Big(\sum_j G^*(l-j,t)\,\hat{a}_j^+\Big)\Big(\sum_{j'} G(l-j',t)\,\hat{a}_{j'}\Big)|\psi(0)\rangle$$

$$= \sum_{j,j'} G^*(l-j,t)\,G(l-j',t)\,\langle\psi(0)|\,\hat{a}_j^+ a_{j'}\,|\psi(0)\rangle$$

$$= \sum_{j,j'} G^*(l-j,t)\,G(l-j',t)\,\underbrace{\langle 0|\hat{a}_{j_2}\hat{a}_{j_1}\,\hat{a}_j^+ a_{j'}\,a_{j_1}^+ a_{j_2}^+|0\rangle}_{\delta_{j',j_1}\delta_{j,j_1} + \delta_{j',j_2}\delta_{j,j_2}}$$

$$= |G(l-j_1,t)|^2 + |G(l-j_2,t)|^2$$

Wahrscheinlichkeiten, das eine Anregung von j_1 bzw. j_2 nach l propagiert während der Zeit t.

Sei nun $|\psi(0)\rangle$ ein kohärenter Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \hat{D}\left[\alpha_{j_1}=1,\ \alpha_{j_2}=e^{i\varphi},\ \alpha_{j\neq j_1,j_2}=0\right]|0\rangle$$

$$\rightarrow \quad \langle\psi(0)|\,\hat{a}_\ell(t)\,|\psi(0)\rangle = \sum_j G(\ell-j,t)\quad\langle\psi(0)|\,\hat{a}_j\,|\psi(0)\rangle$$

$$= G(\ell-j_1,t) + G(\ell-j_2,t)\,e^{i\varphi}$$

$$\langle\psi(0)|\,\hat{a}_\ell^+(t)\,\hat{a}_\ell(t)\,|\psi(0)\rangle = \sum_{j,j'} G^*(\ell-j,t)\,G(\ell-j',t)\quad\langle\psi(0)|\,\hat{a}_j^+\,\hat{a}_{j'}\,|\psi(0)\rangle$$

[mit

$$\langle\psi(0)|\,a_j^+\,a_{j'}\,|\psi(0)\rangle = \left(a_j\,|\psi(0)\rangle\right)^+ a_{j'}\,|\psi(0)\rangle$$

$$= \delta_{j,j_1}\,\delta_{j',j_1}\cdot 1 + \delta_{j,j_2}\,\delta_{j',j_2}\cdot e^{-i\varphi}e^{i\varphi}$$

$$+ \delta_{j,j_1}\,\delta_{j',j_2}\,e^{i\varphi} + \delta_{j,j_2}\,\delta_{j',j_1}\,e^{-i\varphi}$$]

$$\langle\psi(0)|\,\hat{a}_\ell^+(t)\,\hat{a}_\ell(t)\,|\psi(0)\rangle = |G(\ell-j_1,t)|^2 + |G(\ell-j_2,t)|^2$$

$$+ \underbrace{e^{i\varphi}\,G^*(\ell-j_1,t)\,G(\ell-j_2,t) + e^{-i\varphi}\,G(\ell-j_1,t)\,G^*(\ell-j_2,t)}_{\text{Interferenzterme}}$$