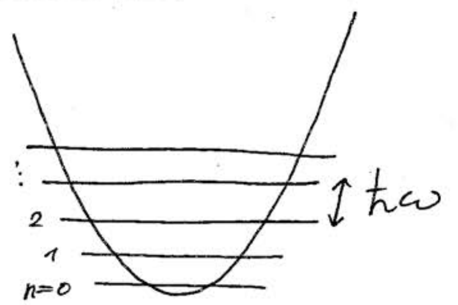
1. Der harmonische Oszillator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$$

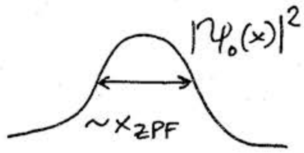


Ergebnis (s.u.):

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots$$

Grundzustand:



$$\Psi_0(x) = \mathcal{N}\, e^{-\frac{x^2}{4x_{ZPF}^2}}$$

mit der Breite der Nullpunktfluktuationen

$$x_{ZPF}^2 = \langle \Psi_0 | \hat{x}^2 | \Psi_0 \rangle = \underline{\underline{\frac{\hbar}{2m\omega}}}$$

(ZPF = "zero-point fluctuations")

und

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{x_{ZPF}}} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/4}}$$

Bew.: Einsetzen $\Rightarrow$ $\hat{H}\Psi_0 = E_0 \Psi_0$

$$\Bigg[\quad \partial_x^2 e^{-\frac{x^2}{4x_{ZPF}^2}} = \partial_x\left(-\frac{x}{2x_{ZPF}^2} e^{-\cdots}\right) = \left[-\frac{1}{2x_{ZPF}^2} + \frac{x^2}{4x_{ZPF}^4}\right] e^{-\cdots}$$

$$= \left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^2 \left[-\frac{\hbar}{4m\omega} + \frac{x^2}{4}\right] e^{-\cdots}$$

$$= \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right) \cdot \left[-\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right] e^{-\cdots}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 \Psi_0 + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \Psi_0 = \frac{\hbar\omega}{2}\Psi_0 \quad \checkmark \quad \Bigg]$$

Erzeuger und Vernichter

Bereits klassisch ist

$$\alpha \equiv \frac{1}{\tilde{x}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right) \in \mathbb{C}$$

$\uparrow$ Vorfaktor, damit α dimensionslos

sehr nützlich:

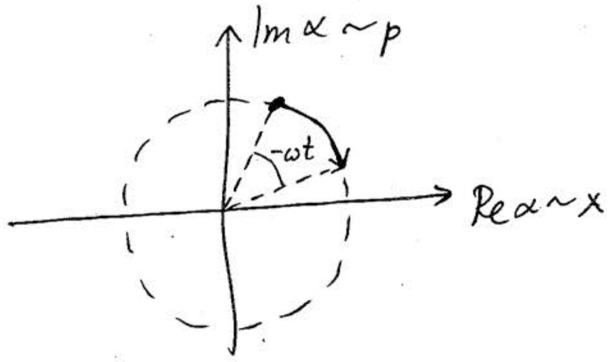
$$\dot{\alpha} = \frac{1}{\tilde{x}}\left(\dot{x} + i\frac{\dot{p}}{m\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{\tilde{x}}\left(\frac{p}{m} + i\,\frac{-m\omega^2 x}{m\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{\alpha} = -i\omega\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha(t) = \alpha(0)\,e^{-i\omega t}$$

einfache Kreisbahn in komplexer Ebene
= Phasenraum (x,p)



Außerdem:

$$|\alpha|^2 \equiv const = \frac{1}{\tilde{x}^2}\left(x^2 + \frac{p^2}{m^2\omega^2}\right)$$

$$= \frac{2}{m\omega^2\tilde{x}^2}\underbrace{\left(\frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{p^2}{2m}\right)}_{\text{Energie}} \sim E$$

$\Rightarrow$ in der QM:

setze $$\hat{a} \equiv \frac{1}{2x_{ZPF}}\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}^+\hat{a} = \frac{1}{(2x_{ZPF})^2}\left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)\left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\omega}\right)$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}^2}{m\omega^2} + \frac{i}{m\omega}\underbrace{[\hat{x},\hat{p}]}_{i\hbar}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 = \hat{H}}$$

Kommutator:

$$[\hat{a},\hat{a}^+] = \frac{1}{(2x_{ZPF})^2}\frac{i}{m\omega}\underbrace{\left(-[\hat{x},\hat{p}] + [\hat{p},\hat{x}]\right)}_{-2i\hbar}$$

$$= \frac{m\omega}{2\hbar}\frac{2\hbar}{m\omega} = \underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{[\hat{a},\hat{a}^+] = 1}$$

$\Rightarrow$ Zeitentwicklung:

$$\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}(t), \hat{H}(t)]$$
$$= \frac{1}{i\hbar}\hbar\omega \underbrace{[\hat{a}(t), \hat{a}^+(t)\hat{a}(t)]}_{\underbrace{[\hat{a}(t), \hat{a}^+(t)]}_{1}\hat{a}(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\hat{a}(t) = -i\omega\hat{a}(t)}$$

$$\boxed{\hat{a}(t) = \hat{a}(0)\, e^{-i\omega t}}$$

$$\hat{x} = x_{ZPF}(\hat{a} + \hat{a}^+) \qquad \text{(wie } \mathrm{Re}\,\alpha \text{ vorhin)}$$
$$\hat{p} = -im\omega x_{ZPF}(\hat{a} - \hat{a}^+) \qquad \text{(wie } \mathrm{Im}\,\alpha\text{)}$$
$$= m\frac{d}{dt}\hat{x}(t)$$

Eigenzustände: Sei $|0\rangle$ = Grundzustand (Ψ_0)

Wir finden: $\boxed{\hat{a}|0\rangle = 0}$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}^+\hat{a}\,|0\rangle = 0$$

Betrachte $\hat{a}^+ a$ = "Zahloperator" (Zahl der Anregungen)

Es gilt: $[\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+$

$\Rightarrow$ Wenn $|n\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{a}^+\hat{a}$ (und damit von $\hat{H}$) zum Eigenwert n ist, dann finden wir: auch $\hat{a}^+|n\rangle$ ist einer!

Bew.:

$$\hat{a}^+\hat{a}\,(\hat{a}^+|n\rangle)$$
$$= \big(\underbrace{[\hat{a}^+\hat{a}, \hat{a}^+]}_{\hat{a}^+} + \hat{a}^+\hat{a}^+\hat{a}\big)|n\rangle$$
$$= (n+1)\,\hat{a}^+|n\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}^+|n\rangle \sim |n+1\rangle$$

Normierung?

für $|\Psi\rangle = \hat{a}^+|n\rangle$

ist
$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\hat{a}^+ n\,|\,\hat{a}^+ n\rangle$$
$$= \langle n|\,\hat{a}\hat{a}^+\,|n\rangle$$
$$= \langle n|\,\hat{a}^+\hat{a} + \underbrace{[\hat{a},\hat{a}^+]}_{1}\,|n\rangle$$
$$= n+1$$

$$\Rightarrow \quad |n+1\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{korrekt} \\ \text{normiert}}}{=} \frac{\hat{a}^+|n\rangle}{\sqrt{n+1}}$$

bzw.:

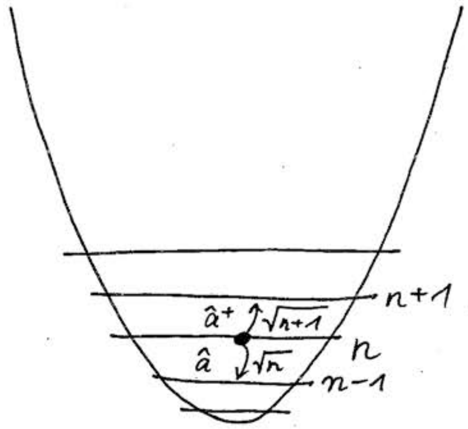
$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\;|n+1\rangle$$

$\Rightarrow$ "Erzeuger" (erzeugt zusätzliche Anregung)

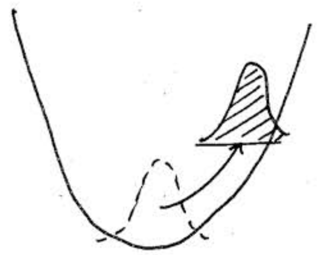
analog:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\;|n-1\rangle$$

$\Rightarrow$ "Vernichter" (vernichtet Anregung)



Kohärente Zustände



(= verschobene Grundzustände)

= Eigenzustände zu $\hat{a}$

$$\hat{a}|\alpha\rangle \overset{!}{=} \alpha|\alpha\rangle \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

$\Rightarrow$ für $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$

ergibt sich:
$$\hat{a}|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{n}\, |n-1\rangle$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1}\, |n\rangle$$

also (Vgl. von l.S. und r.S. in $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$):

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = \alpha c_n$$

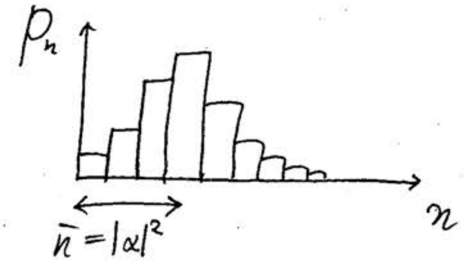
$\rightsquigarrow$ Rekursion

$\Rightarrow$ Lösung:
$$\boxed{|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle}$$

⇒ Anzahlverteilung im kohär. Zustand:
(z.B.: Photonen- oder Phononenzahl)

$$p_n = |c_n|^2 = e^{-|\alpha|^2} \cdot \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = \underline{\text{Poissonverteilung}}$$

mit Mittelwert
$\bar{n} = \underline{\underline{|\alpha|^2}} = \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle$



$$\langle \hat{x} \rangle = x_{ZPF} \langle \alpha | \hat{a} + \hat{a}^+ | \alpha \rangle = x_{ZPF} \Big(\underbrace{\langle \alpha | \hat{a} \alpha \rangle}_{\alpha} + \underbrace{\langle \hat{a}^+ \alpha | \alpha \rangle}_{\alpha^*} \Big)$$

also: $\langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle$

$$= 2 x_{ZPF} \, \mathrm{Re}\, \alpha$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \ldots = -i m \omega x_{ZPF} (\alpha - \alpha^*) = 2 m \omega x_{ZPF} \, \mathrm{Im}\, \alpha$$

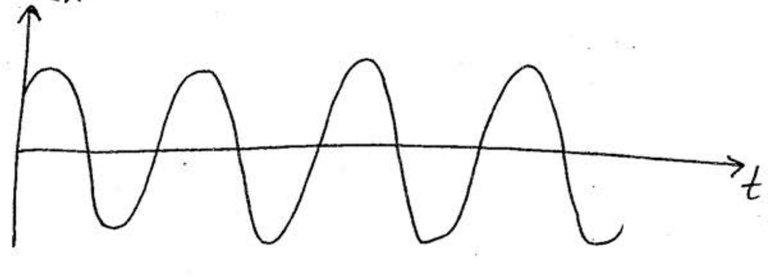
Zeitentwicklung:

$$\hat{U}(t) | \alpha \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \underline{\underline{e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}}} | n \rangle$$

$$= e^{-i\frac{\omega}{2}t} | \alpha(t) \rangle$$

mit $\alpha(t) \equiv \alpha \cdot e^{-i\omega t}$

⇒ wie klassisch: Kreisbahn im Phasenraum,
und Schwingung in $\langle \hat{x} \rangle$ und $\langle \hat{p} \rangle$:



Das war zu erwarten, denn:

$$\langle \Psi(t)|\hat{a}|\Psi(t)\rangle = \langle \Psi(t=0)|\underbrace{\hat{a}(t)}_{\hat{a}\,e^{-i\omega t}}|\Psi(t=0)\rangle \quad \text{(siehe oben)}$$

$$= e^{-i\omega t}\underbrace{\langle\alpha|\hat{a}|\alpha\rangle}_{\alpha} \quad \checkmark$$

Breite des kohär. Zustands?

$$\langle(\hat{x}-\langle\hat{x}\rangle)^2\rangle = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2$$

$$= x_{ZPF}^2\cdot\Big(\langle\underbrace{(\hat{a}+\hat{a}^+)^2}_{\hat{a}^2+\hat{a}^{+2}+\underbrace{\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{a}^+\hat{a}}_{2\hat{a}^+\hat{a}+1}}\rangle - \underbrace{\langle\hat{a}+\hat{a}^+\rangle^2}_{(\alpha+\alpha^*)^2 \text{ (siehe oben)}}\Big)$$

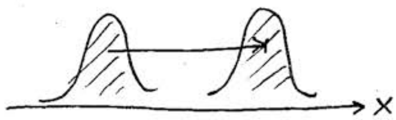
$$= x_{ZPF}^2\cdot\Big(\big(\alpha^2+\alpha^{*2}+2|\alpha|^2+1\big)-\big(\alpha^2+\alpha^{*2}+2|\alpha|^2\big)\Big)$$

$$\equiv x_{ZPF}^2 = \text{Breite des Grundzustandes!}$$

analog: $\langle(\hat{p}-\langle\hat{p}\rangle)^2\rangle = m^2\omega^2 x_{ZPF}^2$ = Impulsbreite des GZ!

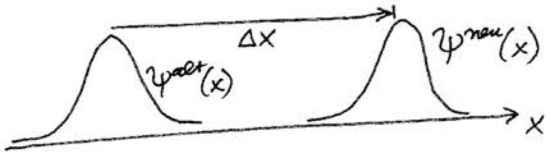
Vermutung: $|\alpha\rangle$ ist ein verschobener GZ!

(mit ggf. endlicher Geschw.keit, also verschoben in x und p!)



Exkurs: Der Verschiebungsoperator

Ziel: $\psi^{neu}(x) = \psi^{alt}(x - \Delta x)$



Verschiebung nach rechts um Δx

Taylor-Reihe:

$$\psi^{neu}(x) = \psi^{alt}(x) - \Delta x\, \partial_x \psi^{alt}(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} \partial_x^2 \psi^{alt}(x) \mp \ldots$$

$$= \underbrace{\exp(-\Delta x\, \partial_x)}_{\text{Verschiebungsoperator}} \psi^{alt}(x)$$

Verschiebung wird durch den Impuls generiert:

$$-\Delta x \partial_x = \frac{\Delta x}{i\hbar}(-i\hbar \partial_x) = \frac{\Delta x}{i\hbar}\hat{p}$$

<u>Speziell</u> für den <u>harmonischen Oszillator</u>:

$$\hat{p} = -im\omega x_{ZPF}(\hat{a} - \hat{a}^+)$$

$$\Rightarrow$$

$$-\Delta x \partial_x = \Delta x \underbrace{\frac{m\omega}{\hbar} x_{ZPF}}_{\frac{1}{2x_{ZPF}}} (\hat{a}^+ - \hat{a}) = \frac{\Delta x}{2x_{ZPF}}(\hat{a}^+ - \hat{a})$$

$$\left(\text{weil } x_{ZPF}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\right)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $\Delta x \equiv 2x_{ZPF} \cdot \alpha \Rightarrow$

$\alpha(\hat{a}^+ - \hat{a})$ generiert Verschiebung

Verallgemeinerung: Betrachte, für $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\hat{D}(\alpha) \equiv \exp(\alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a})}$$

"<u>displacement</u>"

$\Rightarrow$ generiert Verschiebung in Ort <u>und</u> Impuls

wird unten gezeigt! $\Leftarrow \hat{D}(\alpha)$ ist <u>unitär</u>, $\hat{D}^+(\alpha) = [\hat{D}(\alpha)]^{-1}$

Was ist

$$\hat{x}\,\hat{D}(\alpha)\,|\Psi\rangle$$

oder $\hat{p}\,\hat{D}(\alpha)\,|\Psi\rangle$?

Setze $\hat{A} \equiv \alpha \hat{a}^+ - \alpha^* \hat{a} \Rightarrow \hat{D}(\alpha) = e^{\hat{A}}$

$$[\hat{x}, \hat{A}] = x_{ZPF}\,[\hat{a}+\hat{a}^+, \alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}]$$

$$= x_{ZPF}(\alpha + \alpha^*) \equiv \Delta x$$

in der Taylorreihe von $e^{\hat{A}}$ müssen wir an $\hat{A}^n$ vorbei kommutieren:

$$\Rightarrow \hat{x}\hat{A}^n = \hat{A}\hat{x}\hat{A}^{n-1} + \underbrace{[\hat{x}, \hat{A}]}_{\Delta x}\hat{A}^{n-1}$$

$$= \hat{A}^2\hat{x}\hat{A}^{n-2} + \hat{A}\underbrace{[\hat{x}, \hat{A}]}_{\Delta x}\hat{A}^{n-2} + \Delta x \hat{A}^{n-1}$$

$$= \ldots$$

$$= \hat{A}^n\hat{x} + \underbrace{n\,\hat{A}^{n-1}}_{\text{"Ableitung nach } \hat{A}\text{"}}\cdot\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}e^{\hat{A}} = e^{\hat{A}}\hat{x} + \underbrace{e^{\hat{A}}}_{= \text{ Abltg. von } e^{\hat{A}}}\cdot\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \hat{x}\,\hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha)\,(\hat{x} + \Delta x)$$

$\Rightarrow$ z.B.: $\langle \hat{D}(\alpha)\Psi \,|\, \hat{x} \,|\, \hat{D}(\alpha)\Psi\rangle$

$$= \langle\Psi|\,\hat{D}^+(\alpha)\underbrace{\hat{x}\,\hat{D}(\alpha)}_{\hat{D}(\alpha)(\hat{x}+\Delta x)}\,|\Psi\rangle$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \hat{D}^+(\alpha)\hat{D}(\alpha) = \mathbb{1}}}{=} \langle\hat{x}\rangle + \Delta x$$ $\Rightarrow$ wirklich: Verschiebung!

Analog:

$$[\hat{p}, \hat{A}] = -im\omega x_{ZPF} \underbrace{[\hat{a}-\hat{a}^+, \alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}]}_{=\alpha-\alpha^*} \equiv \Delta p$$

$$\Rightarrow \quad \hat{p}\,\hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha)\,(\hat{p}+\Delta p)$$

$\Downarrow$

Impulsverschiebung!

$\Rightarrow$ Ganz allgemein:

$$\langle \hat{D}(\alpha)\Psi | f(\hat{p}) | \hat{D}(\alpha)\Psi \rangle$$

$$= \langle \Psi | \underbrace{\hat{D}^+(\alpha) f(\hat{p}) \hat{D}(\alpha)}_{\hat{D}(\alpha) f(\hat{p}+\Delta p)} | \Psi \rangle$$

[Bew. durch Taylorreihe von $f(\hat{p})$]

$$= \langle \Psi | f(\hat{p}+\Delta p) | \Psi \rangle$$

analog für $\hat{x}$. ✓

Bem.: $\hat{D}(-\alpha)$ verschiebt zurück $\Rightarrow (\hat{D}(\alpha))^+ = \hat{D}(-\alpha) = (\hat{D}(\alpha))^{-1} \Rightarrow \hat{D}(\alpha)$ ist unitär!

Behauptung: kohärenter Zustand $|\alpha\rangle$ ist ein verschobener Grundzustand, also:

$$\boxed{|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle}$$

Bew.: verwende "Baker-Campbell-Hausdorff"-Formel, die sagt

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

wenn $\hat{A}$ und $\hat{B}$ mit $[\hat{A},\hat{B}]$ kommutieren.

$\Rightarrow$ hier:

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}} = e^{\alpha\hat{a}^+} e^{-\alpha^*\hat{a}} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$$

$$\Rightarrow \hat{D}(\alpha)|0\rangle \underset{\uparrow}{=} e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \cdot e^{\alpha\hat{a}^+} |0\rangle$$

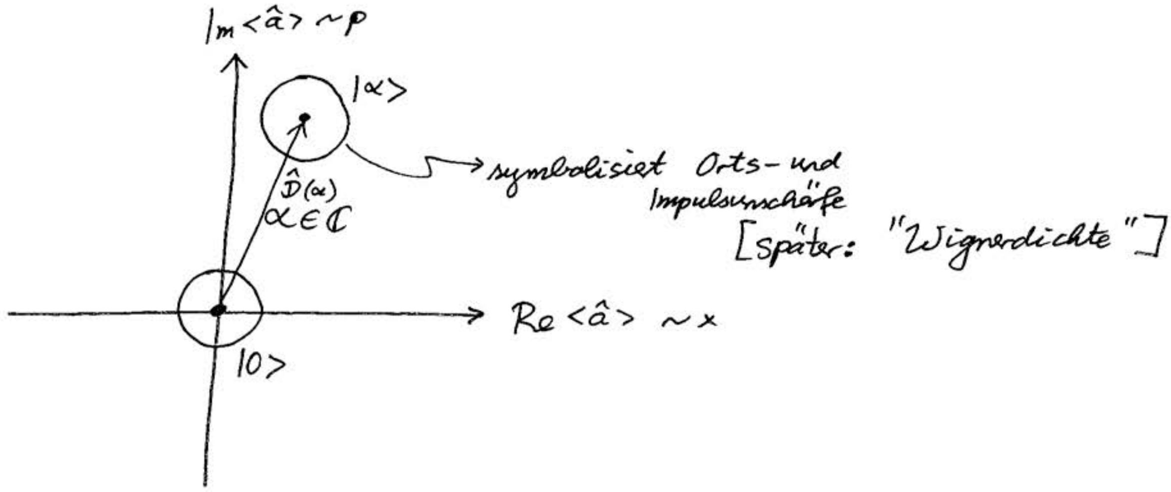
denn $e^{-\alpha^*\hat{a}}|0\rangle \equiv |0\rangle$, weil nur 0^{te} Ordnung stehen bleibt, denn $\hat{a}|0\rangle = 0$

$$e^{\alpha\hat{a}^+}|0\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\alpha^n \underbrace{\hat{a}^{+n}|0\rangle}_{\sqrt{n!}\,|n\rangle} = \sum \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

(Matrixelemente von $\hat{a}^+$!)

$$\Rightarrow \quad \hat{D}(\alpha)|0\rangle = |\alpha\rangle \checkmark$$

Graphische Darstellung:



Allgemeine lineare Dynamik eines Quanten-Harmonischen Oszillators

$$\hat{H}(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega(t)^2}{2}\hat{x}^2 - F(t)\hat{x}$$

beliebige zeitabhängige Federkonstante

beliebige zeitabh. Kraft

Beh.: Wenn $\Psi(x,t=0)$ eine Gauß-Wellenfunktion war, dann bleibt das so für alle Zeiten, also:

(für ein $\hat{H}(t)$ von dieser Form!)

$$\Psi(x,t) \sim \exp\left[-\frac{(x-\bar{x}(t))^2}{4\tilde{\sigma}^2(t)} + ik(t)x\right]$$

mit $\bar{x}(t), k(t) \in \mathbb{R}$ und $\tilde{\sigma}^2(t) \in \mathbb{C}$ (!)

Bew.: Einsetzen in Schrödingerglg. (analog zur Hausaufgabe mit zerfließendem Gaußpaket)

Die Heisenberg-Bew.glg. für dieses $\hat{H}(t)$ sind linear:

(daher "lineare" Dynamik!)

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\hat{p}(t)}{dt} &= F(t) - m\omega(t)^2\hat{x}(t)\\ \frac{d\hat{x}(t)}{dt} &= \frac{\hat{p}(t)}{m}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Lsg. ist formal identisch mit klass. Lsg. (mit $x \mapsto \hat{x}$ usw.)

Anstatt die SGl zu lösen, kann man auch direkt diese Glg.en lösen, und dann erhält man:

Mittelwerte
$$\begin{cases}\langle\hat{x}(t)\rangle = \langle\Psi(t=0)|\hat{x}(t)\Psi(t=0)\rangle\\ \langle\hat{p}(t)\rangle\end{cases}$$

Varianzen in x und p und x/p-Korrelation
$$\begin{cases}\langle(\hat{x}(t)-\langle\hat{x}(t)\rangle)^2\rangle =: \langle\delta\hat{x}(t)^2\rangle\\ \langle(\hat{p}(t)-\langle\hat{p}(t)\rangle)^2\rangle =: \langle\delta\hat{p}(t)^2\rangle\\ \langle\delta\hat{x}(t)\delta\hat{p}(t) + \delta\hat{p}(t)\delta\hat{x}(t)\rangle\end{cases}$$

Jedes Gauß-förmige Ψ ist vollständig durch diese 5 Größen bestimmt.