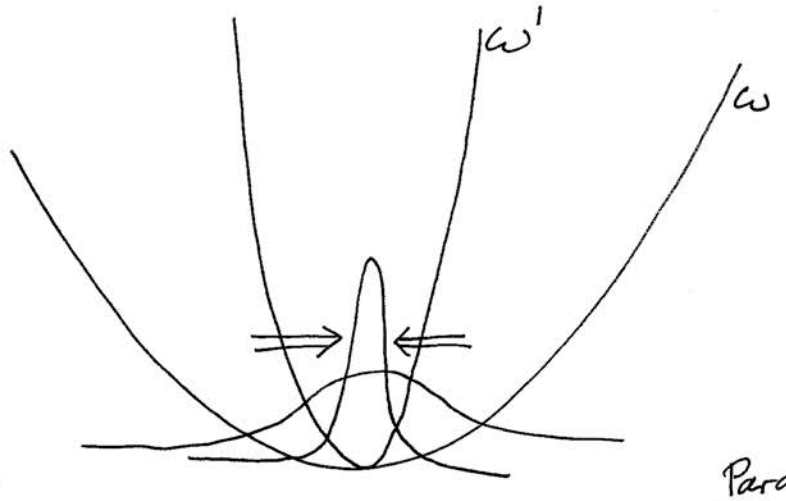
Gequetschte Zustände

= Gauß-Zustände mit Breite ≠ Grundzust. breite

Einfach zu erhalten: Grundzustand für andere Federkonstante!



neue Breite?

Parameter (anstelle von ω'/ω)

$$x'_{ZPF} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega'}} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega'}} \cdot x_{ZPF} \equiv e^{-\theta}\, x_{ZPF}$$

$$p'_{ZPF} = m\omega' x'_{ZPF} = \ldots = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}}\, p_{ZPF} \equiv e^{+\theta}\, p_{ZPF}$$

$$\left(\text{weiterhin: } x'_{ZPF} \cdot p'_{ZPF} = \frac{\hbar}{2}\right)$$

(für $\theta = 0$: $\omega' = \omega$)

Neue Vernichter?

$$\left(\hat{p} = +i\, p_{ZPF}(\hat{a}^+ - \hat{a})\right)$$

$$\hat{a}' = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}}{x'_{ZPF}} + i\,\frac{\hat{p}}{p'_{ZPF}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{x_{ZPF}}{x'_{ZPF}}}_{e^{+\theta}}(\hat{a} + \hat{a}^+) + \underbrace{\frac{p_{ZPF}}{p'_{ZPF}}}_{e^{-\theta}}(\hat{a} - \hat{a}^+)\right)$$

$$= \hat{a} \cdot \underbrace{\cosh\theta}_{\frac{1}{2}(e^{\theta} + e^{-\theta})} + \hat{a}^+ \cdot \underbrace{\sinh\theta}_{\frac{1}{2}(e^{\theta} - e^{-\theta})}$$

⇒ Erzeuger/Vernichter werden gemischt: "<u>Bogoliubov-Transformation</u>"

... neue Grundzustand $|0'\rangle$?

Forderung: $\hat{a}'\,|0'\rangle \overset{!}{=} 0$

Ansatz: $|0'\rangle \overset{\sim}{\cancel{=}} e^{-\frac{r}{2}(\hat{a}^+)^2}\,|0\rangle$

$$(\hat{a}\cdot ch + \hat{a}^+\cdot sh)\,e^{-\frac{r}{2}(\hat{a}^+)^2}\,|0\rangle$$

$$= \Big\{ e^{-\frac{r}{2}(\hat{a}^+)^2}\cdot(\text{—}\,''\,\text{—}) + ch\cdot \underbrace{\left[\hat{a}, e^{-\frac{r}{2}(\hat{a}^+)^2}\right]}_{\parallel\ (\text{Übung})} \Big\}\,|0\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{a}^+} e^{-\frac{r}{2}(\hat{a}^+)^2} = -r\,\hat{a}^+ e^{-\dots}$$

$$= e^{-\frac{r}{2}(\hat{a}^+)^2}\Big(\hat{a}\cdot ch + \hat{a}^+\cdot \underbrace{(sh - r\cdot ch)}_{\overset{!}{=}0}\Big)\,|0\rangle \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ brauchen:

$$sh = r\cdot ch$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \tanh\theta}$$

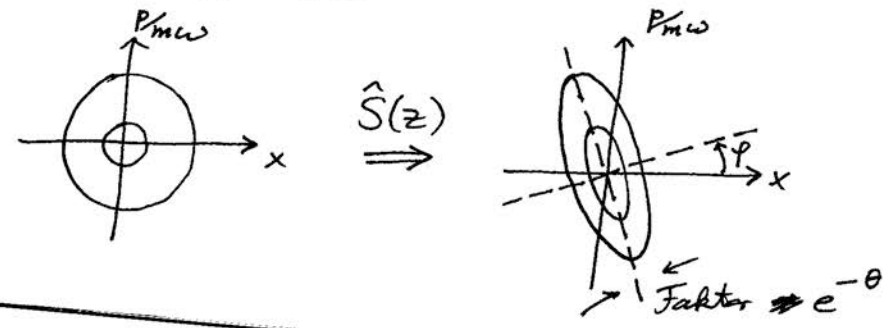
"Quetsch-Parameter"
("squeezing")

Allgemeiner: "Quetsch-Operator"

$$\hat{S}(z) \equiv \exp\left(\frac{1}{2}\left(z^*\hat{a}^2 - z\hat{a}^{+2}\right)\right)$$

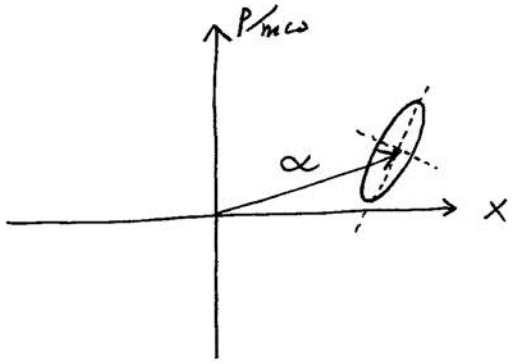
(ist unitär & erhält so die Norm, anders als $e^{-\frac{r}{2}(a^+)^2}$)

mit $z = r e^{i\varphi}$

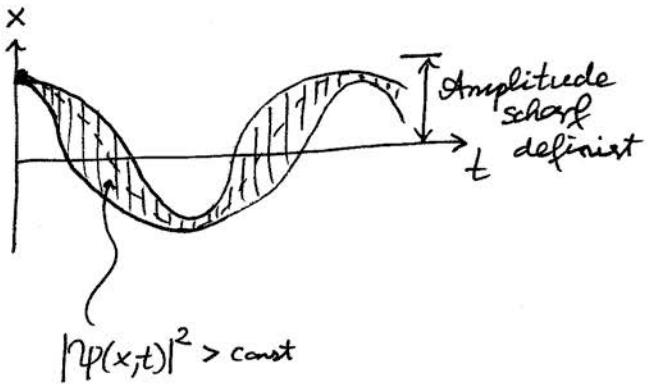


Gequetschte kohärente Zustände:

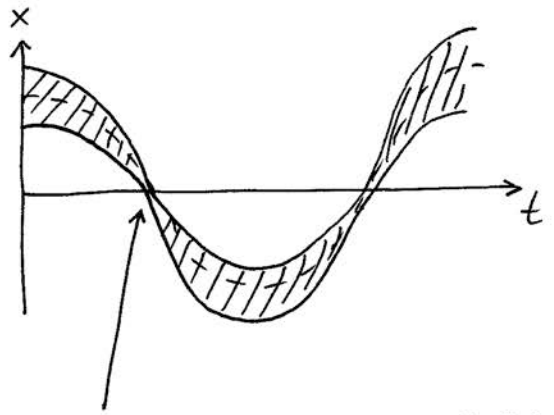
$$\hat{D}(\alpha)\,\hat{S}(z)\,|0\rangle$$



Zeitentwicklung:



"amplituden- gequetscht"



Nulldurchgang scharf definiert

⇒ "Phasen-gequetscht"

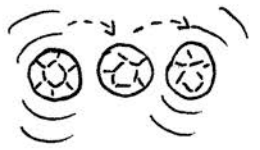
→ Quantenoptik:

⇒ höchste Sensitivität von Interferometern (z.B. LIGO) Grav. wellendetektion

2. Gekoppelte harmonische Oszillatoren

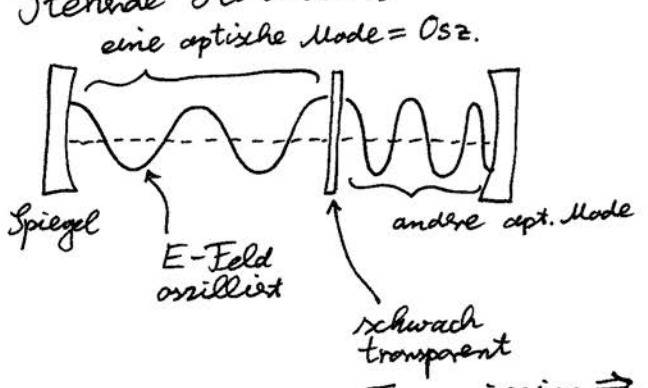
z.B.: Schwingungen eines Moleküls

$\Rightarrow$ Normalmoden!



Übertragung von Schwingungen in einem Molekülkristall

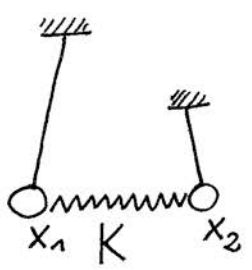
Stehende Lichtwellen



$\Rightarrow$ Transmission $\Rightarrow$ Kopplung!

Starte einfach: <u>Zwei gekoppelte Oszillatoren</u>

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{m_1\tilde{\omega}_1^2}{2}\hat{x}_1^2 + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + \frac{m_2\tilde{\omega}_2^2}{2}\hat{x}_2^2 + \frac{K}{2}(\hat{x}_1-\hat{x}_2)^2$$



(schematisches Bild)

$$\Rightarrow \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \overbrace{\frac{m_1\tilde{\omega}_1^2 + K}{2}}^{\equiv m_1\omega_1^2} \hat{x}_1^2 + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + \overbrace{\frac{m_2\tilde{\omega}_2^2 + K}{2}}^{\equiv m_2\omega_2^2} \hat{x}_2^2$$

$$- K\hat{x}_1\hat{x}_2$$

$\omega_{1,2}$ = durch Kopplung leicht erhöhte Frequenzen (!)

Löse einzelne Oszillatoren $\Rightarrow$

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(\hat{a}_2^+\hat{a}_2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$- \underbrace{K\, x_{ZPF,1}\, x_{ZPF,2}}_{\equiv\, \hbar g} \left(\hat{a}_1 + \hat{a}_1^+\right)\left(\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\right)$$

g = Kopplungsfrequenz

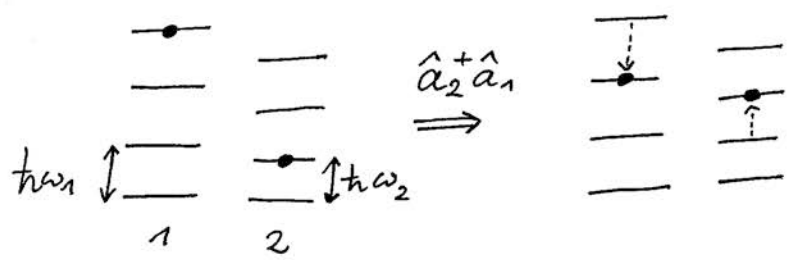
Im folgenden: Betrachte

$$\hat{H} = \hbar\omega_1\, \hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hbar\omega_2\, \hat{a}_2^+\hat{a}_2 - \hbar g\left(\hat{a}_1 + \hat{a}_1^+\right)\left(\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\right)$$

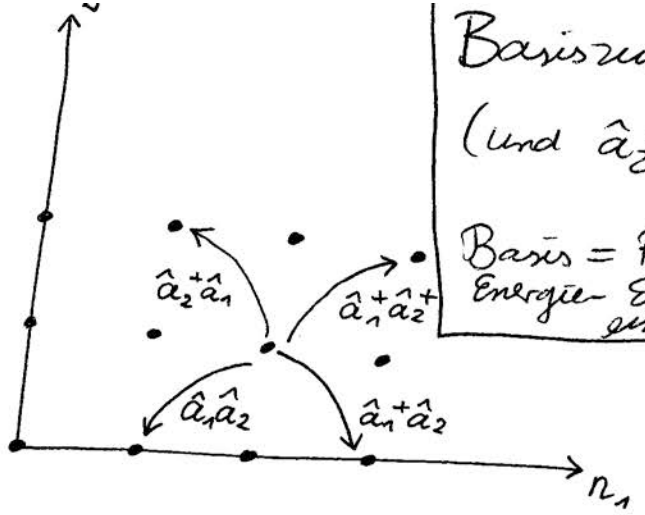
(ohne Nullpkt.energie)

(Oft: Verändere g bei konstanten $\omega_{1,2}$ $\rightsquigarrow$ OK für $g \ll \omega_{1,2}$
(obwohl $g \sim K$ und $\omega_{1,2} = \omega_{1,2}(K)$))

Wichtigster Prozess: Übertragung von Energiequanten



Schema:



Basiszustände: $|n_1, n_2\rangle$

(und $\hat{a}_2^+ |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2+1}\, |n_1, n_2+1\rangle$ usw.)

Basis = Produktbasis, aus den Energie-Eigenzuständen der einzelnen Oszillatoren

"Resonante" Prozesse:

Falls $\omega_1 \approx \omega_2$, dann sind die Übergänge $|i\rangle \to |f\rangle$, die durch

$$\hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_1$$

erzeugt werden "resonant", d.h. $E_i^{(0)} \approx E_f^{(0)}$, wobei

$$E^{(0)}_{(n_1,n_2)} = \text{Energie } \underline{\text{ohne}} \text{ Wechselwirkung}$$
$$= \hbar\omega_1 n_1 + \hbar\omega_2 n_2$$

Dagegen ~~sind~~ erzeugen

$$\hat{a}_1^+\hat{a}_2^+ + \hat{a}_1\hat{a}_2$$

nichtresonante Prozesse:

$$|E_i^{(0)} - E_f^{(0)}| \cancel{\approx 2\hbar\omega_1 \approx 2\hbar\omega_2}$$
$$= \hbar(\omega_1 + \omega_2)$$

Wichtige Näherung: Behalte nur resonante Terme,

$$\boxed{\hat{H} \approx \hat{H}^{(RWA)} \equiv \hbar\omega_1 \hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hbar\omega_2 \hat{a}_2^+\hat{a}_2 - \hbar g(\hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_1)}$$

RWA = "rotating wave approximation"

Gut falls $|g| \ll \omega_{1,2}$ und $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}$

Bem.: $\hat{H}^{(RWA)}$ erhält die Gesamtzahl der Anregungen $\hat{n} \equiv \hat{n}_1 + \hat{n}_2$

denn
$$[\hat{n}, \hat{H}^{(RWA)}] = [\underbrace{\hat{a}_1^+\hat{a}_1}_{\hat{n}_1} + \underbrace{\hat{a}_2^+\hat{a}_2}_{\hat{n}_2}, \hat{H}^{(RWA)}] = \ldots = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\hat{n}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{n}(t), \hat{H}^{(RWA)}(t)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle \hat{n}(t) \rangle \equiv \text{const}$$

$\Rightarrow$ in $\hat{H}^{(RWA)}$ sind die Anregungen wie Teilchen, deren Gesamtzahl erhalten ist!

Später: Dieselbe Beschreibung für bosnische Atome!

Diagonalisierung von $\hat{H}^{(RWA)}$:

Finde neue $\hat{b}_1, \hat{b}_2$, so dass:

$$\hat{H}^{(RWA)} = \hbar\Omega_1 \hat{b}_1^+ \hat{b}_2 + \hbar\Omega_2 \hat{b}_2^+ \hat{b}_2$$

neue Eigenfrequenzen!

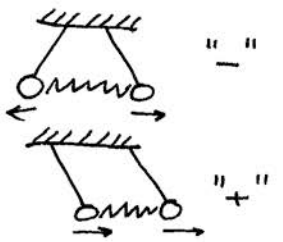
Ansatz: $\hat{b}_1 = \ldots \hat{a}_1 + \ldots \hat{a}_2$
$\hat{b}_2 = \ldots \hat{a}_1 + \ldots \hat{a}_2$ mit passenden Koeffizienten

~~formal, in Matrix-Notation:~~

Einfachster Spezialfall: $\omega_1 \equiv \omega_2 \equiv \omega$ (Resonanz)

Beh.: Dann sind

$$\hat{b}_\pm = \frac{\hat{a}_1 \pm \hat{a}_2}{\sqrt{2}}$$



die passenden "Eigenmoden", also die symmetrische (+) / antisymm. (−) Überlagerung!

Bew.: Einsetzen!

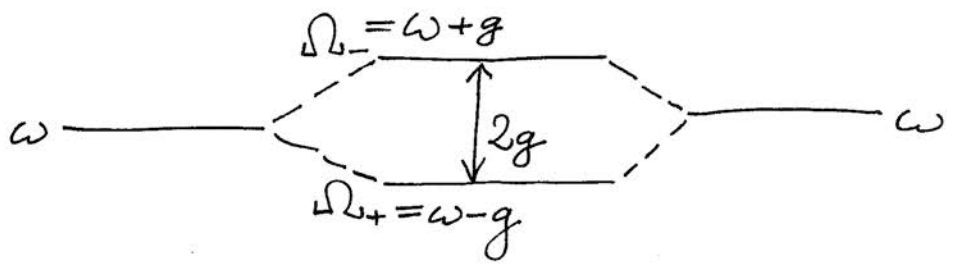
$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{b}_+ + \hat{b}_-}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_2 = \frac{\hat{b}_+ - \hat{b}_-}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H}^{(RWA)} = \hbar\omega\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2\right) - \hbar g\left(\hat{a}_1^+\hat{a}_2 - \hat{a}_2^+\hat{a}_1\right)$$

$$= \ldots$$

$$= \hbar\underbrace{(\omega - g)}_{\Omega_+}\hat{b}_+^+\hat{b}_+ + \hbar\underbrace{(\omega + g)}_{\Omega_-}\hat{b}_-^+\hat{b}_-$$

Frequenzschema:



Bem.: • Symm. Mode hat niedrigere ~~Energie~~ Frequenz ✓
(Feder nicht gestreckt)

• Mit korrekten $\omega = \omega(K)$ würde man finden:

$$\Omega_+ = \omega(K) - g(K) \overset{\text{wegen RWA nur näherungsweise!}}{\approx} \omega(K=0)$$

(symm. Mode spürt Feder nicht)

$$[b_+, b_+^+] = \frac{1}{2}\underbrace{[\hat a_1+\hat a_2, \hat a_1^+ + \hat a_2^+]}_{2} = 1 \quad ✓$$

$$[\hat b_+, \hat b_-^+] = \ldots = 0 \quad \text{usw.}$$

$\Rightarrow$ unabhängige Oszillatoren ✓

Heisenbergs Bewegungsglg.en:

Für $\hat a_1, \hat a_2$:

$$\frac{d}{dt}\hat a_1(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat a_1(t), \underbrace{\hat H(t)}_{\text{s.o.}}]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}[\hat a_1(t), \hbar\omega_1 \hat a_1^+(t)\hat a_1(t) - \hbar g(\hat a_1^+(t)\hat a_2(t) + \hat a_2^+(t)\hat a_1(t))]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}(\hbar\omega_1 \hat a_1(t) - \hbar g \hat a_2(t))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\hat a_1(t) = -i\omega_1 \hat a_1(t) - \underbrace{ig\hat a_2(t)}_{\text{Kopplung!}}$$

ähnlich zur zeit-abh. SGl für Zweiniv.sys.! (mit $\psi_1 \mapsto \hat a_1$ etc.)

(analog für $\hat a_2$: $1 \leftrightarrow 2$)

Für $\hat b_+, \hat b_-$:

$$\frac{d}{dt}\hat b_\pm(t) = -i\Omega_\pm \hat b_\pm(t)$$

$$\Rightarrow \hat b_\pm(t) = e^{-i\Omega_\pm t}\hat b_\pm(0)$$

$\Rightarrow$ Lösung für $\hat a_1(t)$: (im Resonanz: $\omega_1 = \omega_2$)

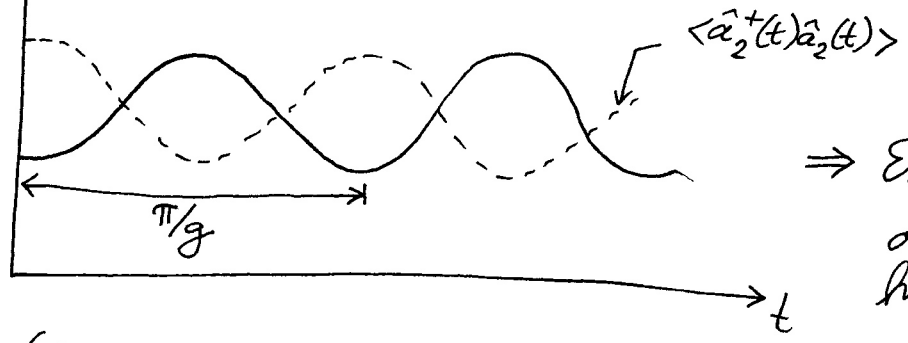
$$\hat a_1(t) = \frac{\hat b_+(t) + \hat b_-(t)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\Omega_+ t}\hat b_+(0) + e^{-i\Omega_- t}\hat b_-(0)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\Omega_+ t}\frac{\hat a_1+\hat a_2}{\sqrt{2}} + e^{-i\Omega_- t}\frac{\hat a_1-\hat a_2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \hat a_1 \cdot \frac{e^{-i\Omega_+ t} + e^{-i\Omega_- t}}{2} + \hat a_2 \cdot \frac{e^{-i\Omega_+ t} - e^{-i\Omega_- t}}{2}$$

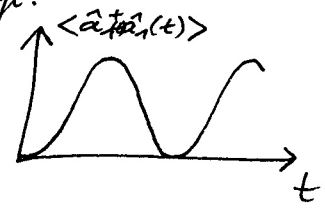
$\Rightarrow \hat a_1^+(t)\hat a_1(t) = \ldots$ (siehe Übung!)



$\Rightarrow$ Energie oszilliert hin und her!

(Bsp., für $\langle \hat{a}_{1\,(2)}^+ \hat{a}_{1\,(2)} \rangle \neq 0$)

falls anfangs nur Osz. 2 angeregt:



Was ist ohne Resonanz?

$(\omega_1 \neq \omega_2)$

Suche auch hier $\hat{H}$ = Summe von H.O. ("diagonalisierte" Form)

Formal:

$$\hat{H} = \hbar\omega_1 \hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hbar\omega_2 \hat{a}_2^+\hat{a}_2 - \hbar g\,(\hat{a}_1^+\hat{a}_2 + \hat{a}_2^+\hat{a}_1)$$

$$\Rightarrow \hat{H} \equiv \sum_{l,j} \hat{a}_l^+ \tilde{H}_{lj}\, \hat{a}_j$$

hier: 2×2-Matrix:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \hbar\omega_1 & -\hbar g \\ -\hbar g & \hbar\omega_2 \end{bmatrix}$$

($\hat{=}$ q.m. Zweiniveausystem)

Finde Eigenvektoren & -werte:

$$\sum_j \tilde{H}_{lj}\, \tilde{\psi}_j^k \overset{!}{=} \varepsilon_k\, \tilde{\psi}_l^k$$

k: zählt Eigenvektoren

l: Koordinaten des Vektors $\tilde{\psi}^k$

$\Rightarrow$ hier: Zweiniveauproblem, z.B.:

$$\varepsilon_\pm = \hbar\,\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \pm \hbar\sqrt{\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)^2 + g^2}$$

[Check für $\omega_1 = \omega_2$ ✓]

$\Rightarrow$ Setze:

$$\hat{a}_\ell = \sum_k \tilde{\psi}_\ell^k \hat{b}_k$$

Bem.: Bei Resonanz sind $\tilde{\psi}^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ und $\tilde{\psi}^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

$$\hat{H} = \sum_{\ell,j} \hat{a}_\ell^+ \tilde{H}_{\ell j} \hat{a}_j$$

$$= \sum_{\ell,j} \Big(\sum_k \tilde{\psi}_\ell^k \hat{b}_k\Big)^+ \tilde{H}_{\ell j} \Big(\sum_m \tilde{\psi}_j^m \hat{b}_m\Big)$$

$$= \sum_{k,m} \hat{b}_k^+ \underbrace{\Big\{\sum_{\ell,j} (\tilde{\psi}_\ell^k)^* \tilde{H}_{\ell j} \tilde{\psi}_j^m\Big\}}_{\underbrace{\sum_\ell (\tilde{\psi}_\ell^k)^* \varepsilon_m \tilde{\psi}_\ell^m}_{\varepsilon_m \delta_{k,m}}} \hat{b}_m$$

(denn $\tilde{H}$ hermitesch $\Rightarrow$ ONB $\tilde{\psi}^k$)

$$\Rightarrow \quad \hat{H} = \sum_k \varepsilon_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k$$

"diagonale" Form von $\hat{H}$

$\hat{=}$ Übergang zu passenden Normalmoden!

$\hat{H}$ = Vielteilchen-Ham.op. (viele kontin. Freiheitsgrade = Osz.en)

$\tilde{H}$ = "Einteilchen"-Ham.op. (hier: 2-Niv.sys.)