Bem.: Drastisch reduzierter Aufwand!

$\hat{H}^{(RWA)} = \underline{\text{quadratisch in } \hat{a}_\ell, \hat{a}_\ell^+}$

Hilbertraumdimension, bei N Oszillatoren:

$(\infty)^N$ bzw. M^N,

falls nur M Niveaus in Numerik

$\Rightarrow$ $\tilde{H} = N \times N$-Matrix

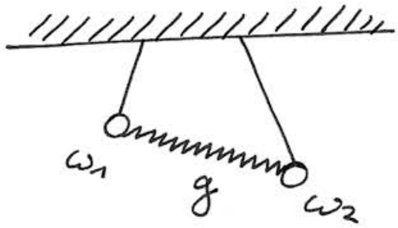
Hilb.r.dim.: $\underline{\underline{N}}$

(Bem.: $\hat{H}$ quadratisch $\Rightarrow$ "nicht-wechselwirkendes" Problem
"freier" Ham.op.)

Fragen (im Folgenden):

- Was ist, wenn $\hat{H}$ <u>nicht</u> quadratisch ist?
  ($z.B.$ $\hat{x}^4 \Rightarrow (\hat{a}^+\hat{a})^2 + \ldots$)
  $\Rightarrow$ schwierig, spannend: "Quanten-Vielteilchenphysik"
  ("wechselwirkende Quantenfeldtheorie")
  $\Rightarrow$ essentiell für Thermalisierung, Streuraten, Phasenübergänge etc.
  Exponentiell großer Hilbertraum: M^N, $N \to \infty$ ☹
- Bsp. 2-Niv.sys.
- Viele Osz., z.B. Kette $\Rightarrow$ Ebene Wellen
- Kohärente Zustände? Gequetschte Zust.?
- Was ist ohne RWA?

Zwei Oszillatoren (RWA), nicht-resonant



$\Rightarrow$ Löse 2-Niveau-System

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & -\hbar g \\ -\hbar g & \hbar\omega_2 \end{pmatrix}$$

~~Ansatz~~

Eigenwerte aus

$$\det\left(\tilde{H} - \varepsilon\cdot\mathbb{1}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \hbar\omega_1 - \varepsilon & -\hbar g \\ -\hbar g & \hbar\omega_2 - \varepsilon \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad (\hbar\omega_1 - \varepsilon)(\hbar\omega_2 - \varepsilon) - (\hbar g)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{1/2} = \hbar\frac{\omega_1+\omega_2}{2} \pm \hbar\sqrt{\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)^2 + g^2}$$
$$= \hbar\Omega_{1/2}$$

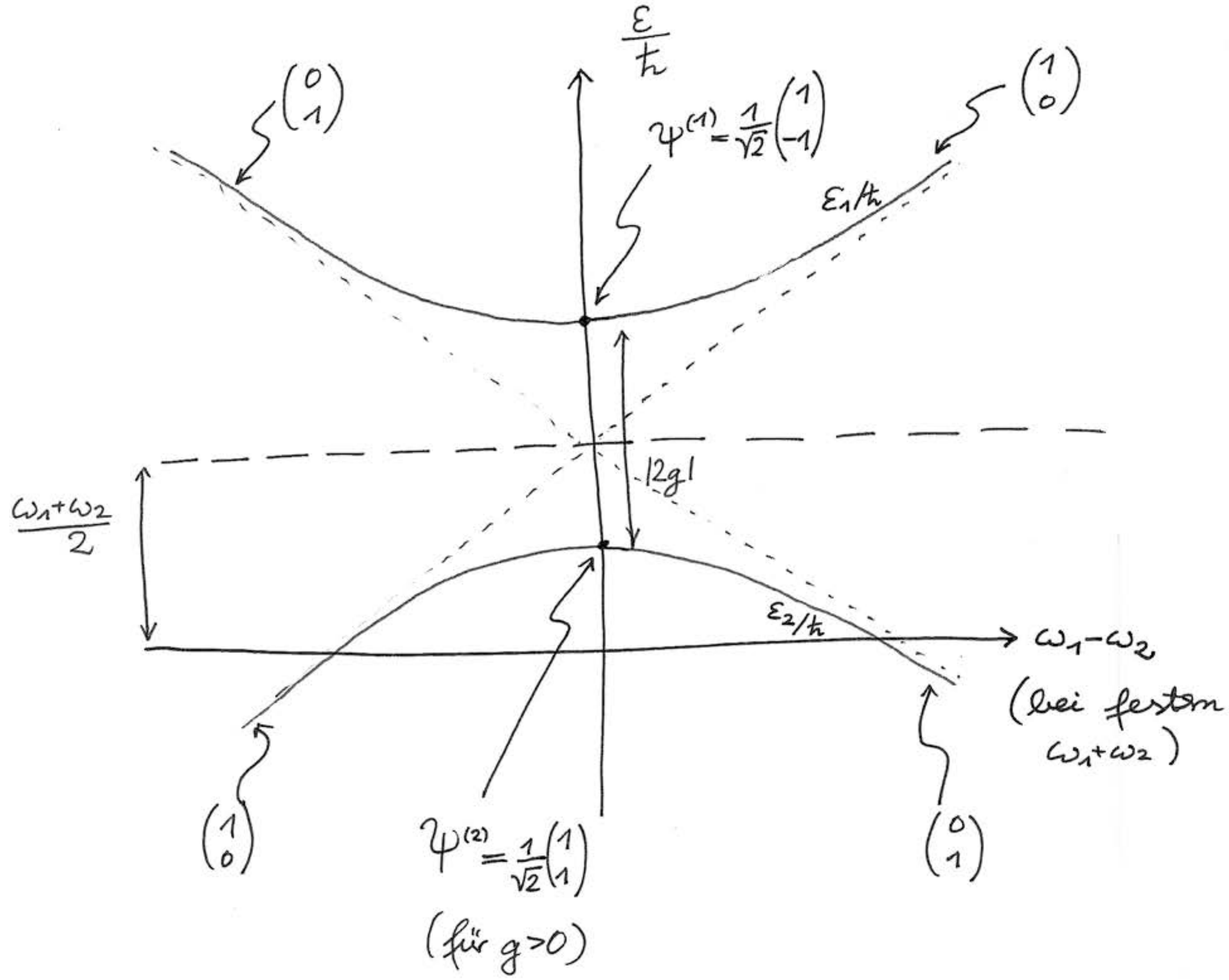
Eigenvektoren:

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$(\psi^{(1)} \perp \psi^{(2)})$ durch Konstruktion

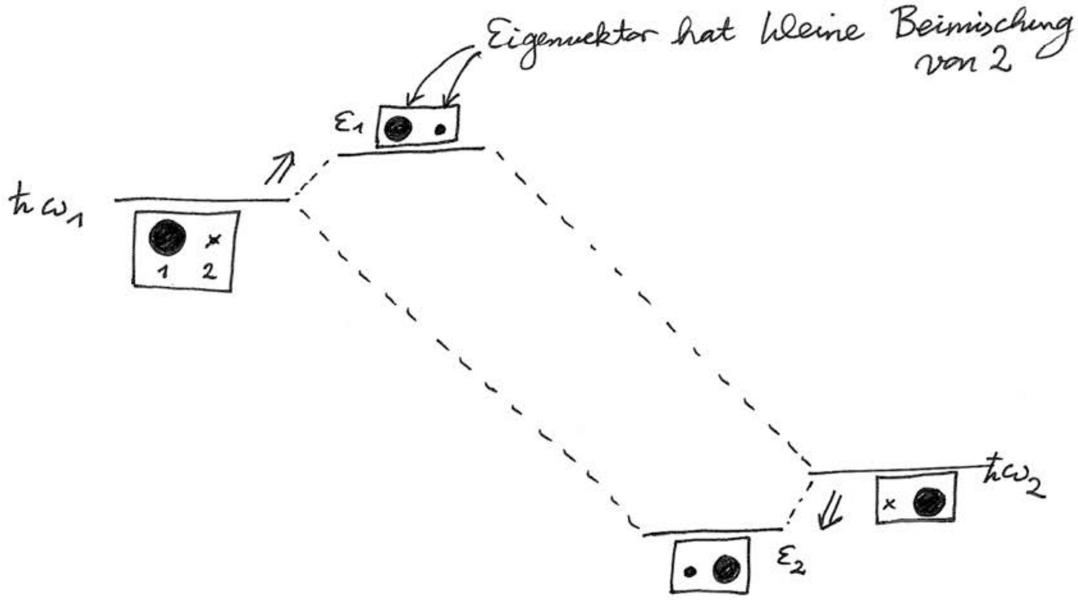
mit $\tilde{H}\psi^{(1)} \stackrel{!}{=} \varepsilon_1\psi^{(1)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$$\tan\theta = \frac{g}{\omega_2 - \frac{\varepsilon_1}{\hbar}}$$



$\frac{\varepsilon}{\hbar}$
$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
$\psi^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$\varepsilon_1/\hbar$
$\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$
$|2g|$
$\varepsilon_2/\hbar$
$\omega_1 - \omega_2$
(bei festem $\omega_1+\omega_2$)
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
$\psi^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
(für $g>0$)
$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Schema:



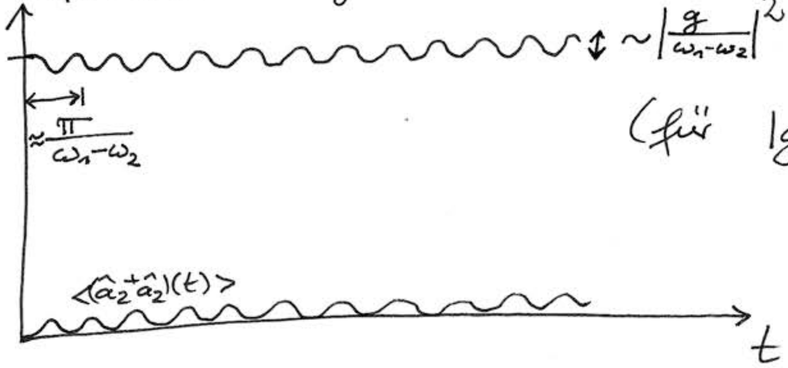
Eigenvektor hat kleine Beimischung von 2
ε_1
$\hbar\omega_1$
1 2
$\hbar\omega_2$
ε_2

Dynamik:

$$\hat{a}_1(t) = \psi_1^{(1)} \underbrace{\hat{b}_1(t)}_{\hat{b}_1(0) e^{-i\frac{\varepsilon_1}{\hbar}t}} + \psi_1^{(2)} \underbrace{\hat{b}_2(t)}_{\text{analog}}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

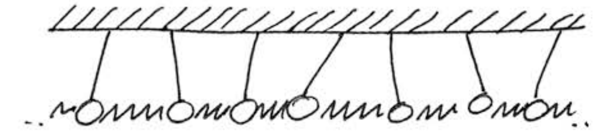
$\langle \hat{a}_1^+(t)\hat{a}_1(t)\rangle \sim$ Energie im 1. Osz.



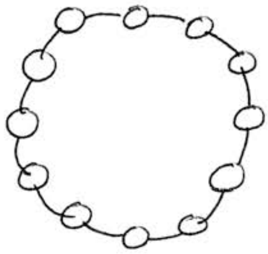
(für $|g| \ll |\omega_1 - \omega_2|$)

$\Rightarrow$ Energietransfer scheitert, weil nicht resonant!

z.B. Kette



z.B. mit periodischen Randbed.:



$\Rightarrow$ voll translations-invariant

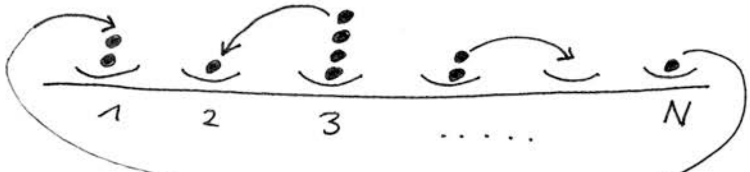
☺

z.B.:
alle resonant; RWA:

$$\text{sei } \hat{H} = \hbar\omega \sum_{j=1}^{N} \hat{a}_j^+ \hat{a}_j - \hbar g \sum_{j=1}^{N} \underbrace{\left(\hat{a}_{j+1}^+ \hat{a}_j + \hat{a}_j^+ \hat{a}_{j+1} \right)}_{\text{nächste-Nachbar-Kopplung}}$$

Es sei $\hat{a}_{N+1}^{(+)} \equiv \hat{a}_1^{(+)}$

"Hüpfen" von "Quasi-" Teilchen (Anregungen) = Phononen (hier)



Suchen: N Normalmoden

Beh.: Diese sind $\hat{b}_k$ mit:

$$\hat{a}_j = \sum_k \frac{e^{ikj}}{\sqrt{N}} \hat{b}_k$$

wobei

$$k = \frac{2\pi}{N} \cdot l \text{ , mit } l = \underbrace{-\frac{N}{2}+1, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, \frac{N}{2}}_{N \text{ Werte}}$$

(sei N grade, sonst: $-\frac{N-1}{2} \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{N-1}{2}$)

Check: $[\hat{a}_j, \hat{a}_e^+] = \delta_{ej}$ usw.

$\Rightarrow [\hat{b}_k, \hat{b}_{k'}^+] = \delta_{kk'}$ usw. ✓

Einsetzen in $\hat H$:

$\Rightarrow$ Terme wie:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k'}\frac{e^{ik'(j+1)}}{\sqrt{N}}\hat b_{k'}\right)^{+}\left(\sum_{k}\frac{e^{ikj}}{\sqrt{N}}\hat b_k\right)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k',k}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{N}e^{i(k-k')j}\right)}_{N\cdot\delta_{kk'}}\hat b_{k'}^{+}\hat b_k e^{-ik'}$$

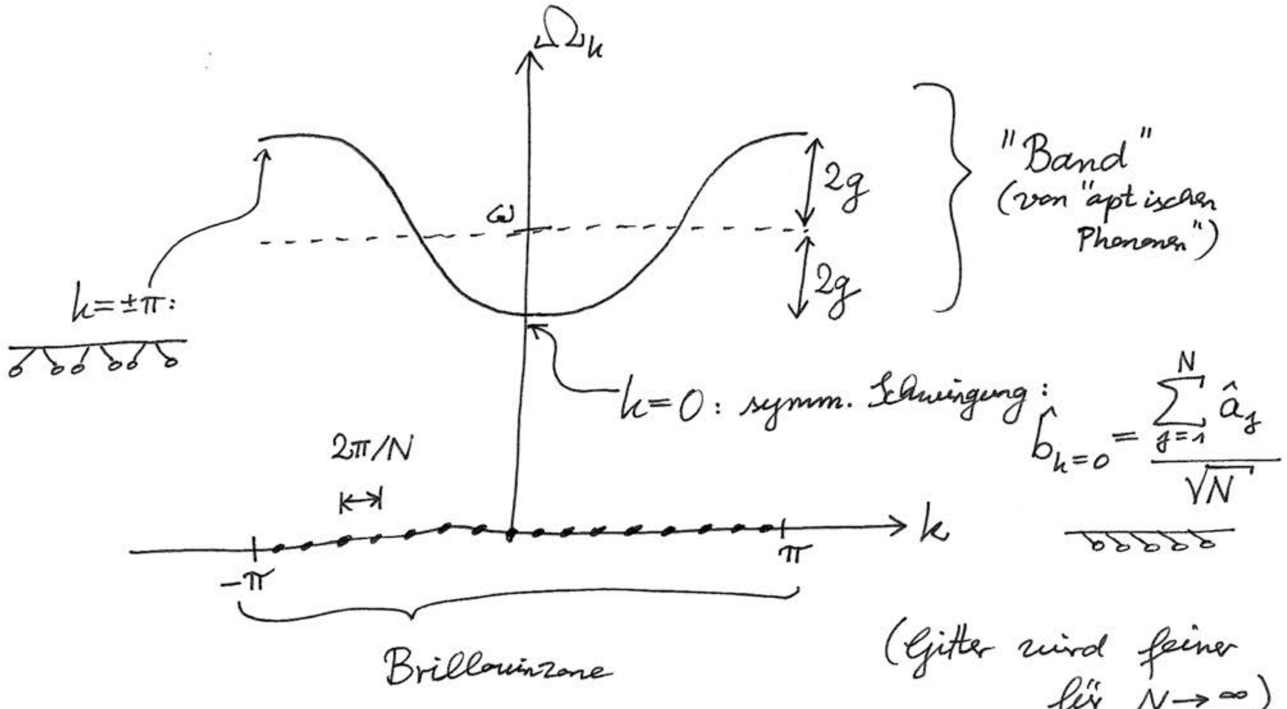
$$=\sum_k e^{-ik}\,\hat b_k^{+}\hat b_k$$

$\Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$$\hat H = \sum_k \hbar\Omega_k\,\hat b_k^{+}\hat b_k$$

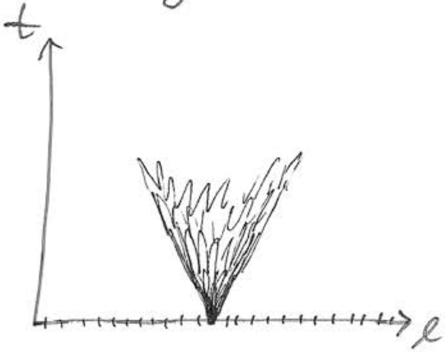
mit

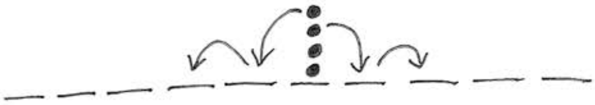
$$\Omega_k = \omega - 2g\cos(k)$$



$\Rightarrow$ Ausbreitung einer Anregung?

Erwartung:





$$\hat{a}_l(t) = \sum_k \frac{e^{ikl}}{\sqrt{N}} \hat{b}_k(t)$$

$$= \sum_k \frac{e^{i(kl - \Omega_k t)}}{\sqrt{N}} \hat{b}_k(0)$$

„Rücktransformation":

$$\hat{b}_k(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\cancel{l}\, j} e^{-ik\cancel{l}\, j} \hat{a}_{\cancel{l}\, j}(0)$$

$$\Rightarrow \hat{a}_l(t) = \sum_j \underbrace{\left\{ \sum_k \frac{e^{i(k(l-j) - \Omega_k t)}}{N} \right\}}_{\equiv G(l-j,\,t)} \hat{a}_j(0)$$

$\equiv G(l-j,t)$ für $t>0$ (später noch: "retardierte" etc. G.F.)

$\circledast$ "Greensfunktion", "Propagator"

$\Rightarrow$ <u>falls</u> anfangs nur Platz s angeregt: $\langle \hat{a}_j^+ \hat{a}_j \rangle = \delta_{j,s}$ und $\langle \hat{a}_{j'}^+ \hat{a}_j \rangle = 0$ für $(j',j) \neq (s,s)$

$\Rightarrow$

$$\langle \hat{a}_l^+(t) \hat{a}_l(t) \rangle = \sum_{j',j} G^*(l-j',t)\, G(l-j,t)\, \langle \hat{a}_{j'}^+(0) \hat{a}_j(0) \rangle$$

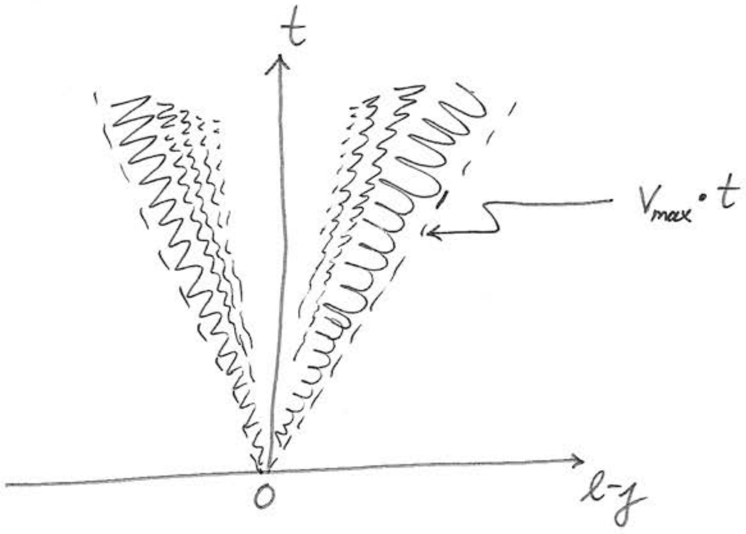
$$\underset{\substack{\text{laut}\\ \text{Annahme}\\ \text{(für diese}\\ \text{Anf.bed.)}}}{\equiv} |G(l-j,t)|^2 \underbrace{\langle \hat{a}_s^+(0) \hat{a}_s(0) \rangle}_{\bar{n}}$$

$\bar{n}$ Anzahl der Anregungen

~~Amplit~~

$G(l-j,t)$ = "Amplitude für eine Anregung, von j nach l zu propagieren, in der Zeit t"

Hier:



~~Es ist~~

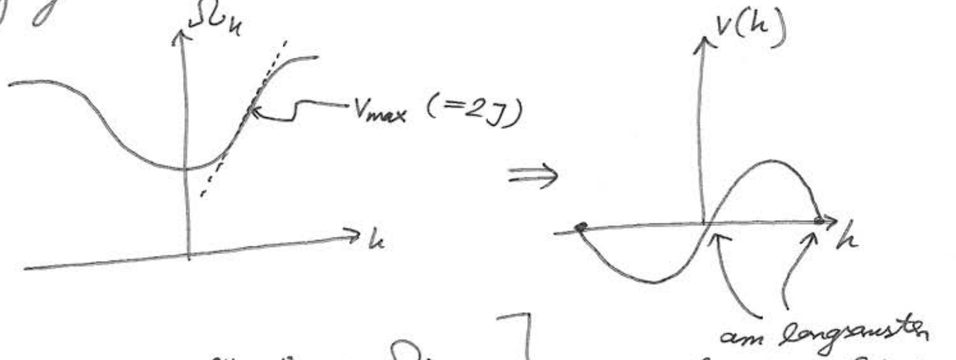
Bem.: Die Gruppengeschwindkeit ist

$$v(k) = \frac{\partial \Omega_k}{\partial k}$$

und

$$v_{max} = \max_k v(k)$$

(bei max. Steigung in der Disp.relation)



[Bem.: G ist eine Besselfunktion für dieses Ω_k]