8. Relativistische Quantenmechanik

Relativitätstheorie (Wiederholung)

Wellengl.: $\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \phi(x,t) - \partial_x^2 \phi(x,t) = 0$

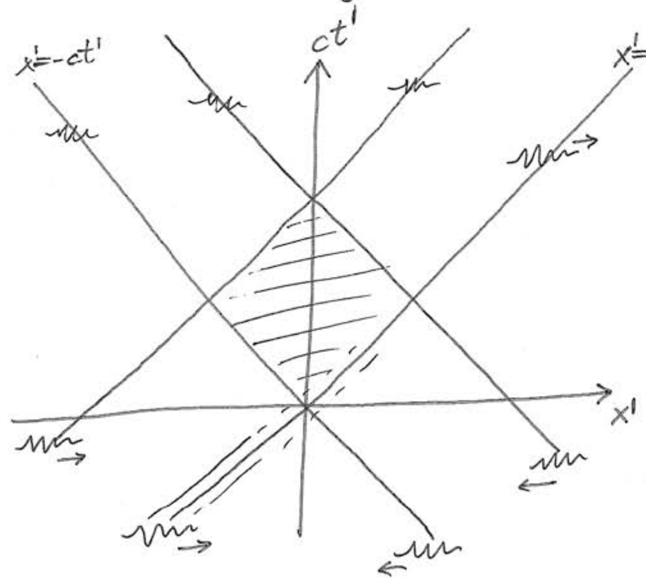
Sei $\phi'(x,t)$ eine Lsg. $\Rightarrow$

Ziel: Konstruiere neue Lsg. $\phi(x,t)$

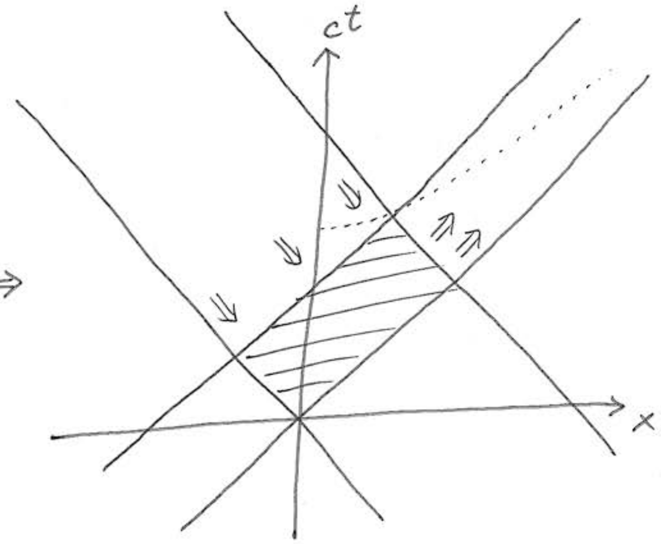
Trivial: $\phi(x,t) = \lambda \phi'(x,t)$ [wg. Linearität hier]

$\phi(x,t) = \phi'(x-\Delta x, t-\Delta t)$ Verschiebung

$\rightarrow$ andere Mögl.keit?



$\Rightarrow$



(gedehnt & gestaucht entlang $x = \pm ct$!)

Beh.: $$\phi(x,t) = \phi'(x',t') = \phi'(x'(x,t), t'(x,t))$$

ist auch eine Lsg., wenn

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{}}$$

& somit auch

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{}} \qquad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{}}$$

"Lorentz-transformation"

(oft "γ" $= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, "$\beta$" $= \frac{v}{c}$)

Bew.: $$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{}}\left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2}\partial_{t'}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{}}\left(\partial_{t'} - v\,\partial_{x'}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \phi'(x',t') - \partial_x^2 \phi'(x',t')$$
$$= \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\left\{\frac{1}{c^2}\left(\partial_{t'} - v\partial_{x'}\right)^2 - \left(\partial_{x'} - \frac{v}{c^2}\partial_{t'}\right)^2\right\}\phi'(x',t') \quad ✓$$
$$= \left(\frac{1}{c^2}\partial_{t'}^2 - \partial_{x'}^2\right)\phi'(x',t') \underbrace{\equiv 0}_{\hookrightarrow \text{weil } \phi' \text{ Lsg. war}}$$

$\Rightarrow \phi(x,t)$ ist auch Lsg. ✓

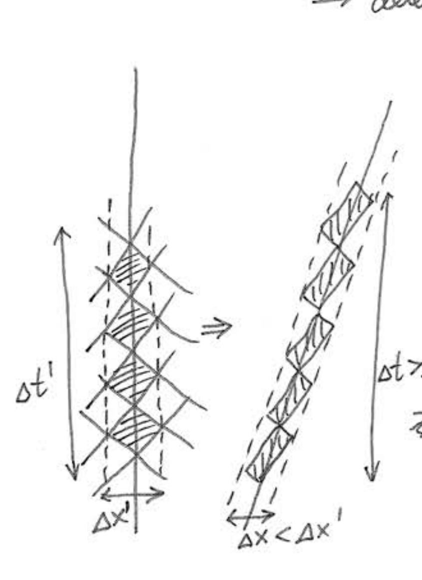
Eigenschaften der <u>Lorentztransformation</u>:

- $x'=0$ bewegt sich nun: $x = vt$ mit Geschw.keit v !
- $x = ct$ bleibt: ✓
$$x' = \frac{(c-v)t}{\sqrt{}} = c\underbrace{t'}_{\frac{t-\frac{v}{c}t}{\sqrt{}}}$$
- Gleichzeitigkeit bleibt <u>nicht</u> erhalten: $t_1' = t_2' \not\Rightarrow t_1 = t_2$!
- Längenkontraktion:

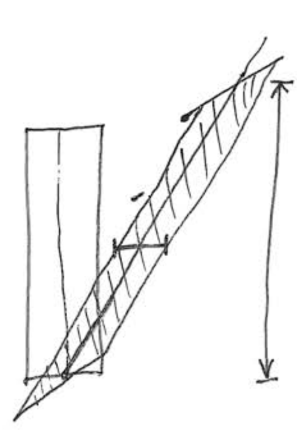
neue Distanz $\Delta x = x$ zwischen $(0, t=0)$ und $(x, t=0)$

$\Rightarrow$ alte Distanz $\Delta x'$ zwischen $(0,0)$ und (x', t')

$$x' = \frac{x}{\sqrt{}} \Rightarrow$$
$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{}}$$



oder: $$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \text{kürzer}$$



- Zeitdilatation:

$$(x=0,\ t=0)\ ,\ (x=vt,\ t)$$

gehört zu

$$(x'=0,\ t'=0),\ (x'=0,\ t'=t\sqrt{1-\left(\tfrac{v}{c}\right)^2}\,)$$

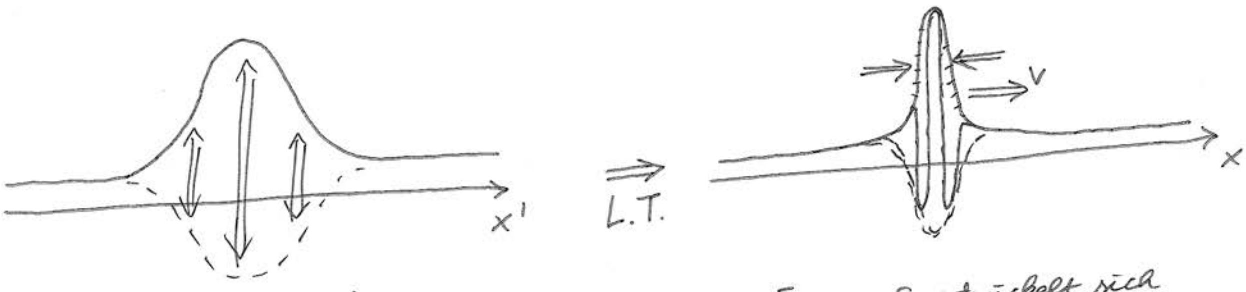
$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \text{länger}$$

- L.T. gilt für alle Wellenglg. (z.B. Schall mit $c = v_s$)
- L.T. gilt auch für <u>nichtlin.</u> Wellenglg. !!

Bsp.: $\frac{1}{c^2}\partial_t^2\phi - \partial_x^2\phi = -K\sin\phi$

hat lokalisierte Lsg.

bewegt sich & ist kontrahiert!



(oszilliert)

[Bem.: Es entwickelt sich Wellenlänge ...]

~~Was wäre, wenn~~

Beobachtung: Beschleunigung des Wellenpaketes führt zu Lorentzkontraktion!

Wenn alle fundamentalen Glg.en "lorentzinvariant" sind (mit c = Lichtgeschw.keit), dann:

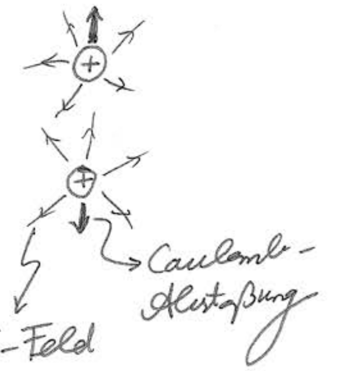
Kontraktion von Atomen, Molekülen, Kristallen, Menschen, Maßstäben!

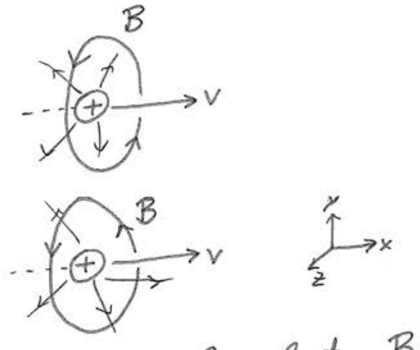
⇓

würden nicht spüren, daß sie sich mit v bewegen!

⇒ (Einstein): Das Relativitätsprinzip bleibt erhalten, allerdings nun L.T. statt Galileotransf.! ($x = x' + vt'$, $t = t'$)

Bedeutung für Maxwell-Gleichungen?





bewegte Lsg. hat B-Feld!
(& Lorentzkraft)
↓
verringert Abstoßung

E & B-Feld werden ineinander transf.!

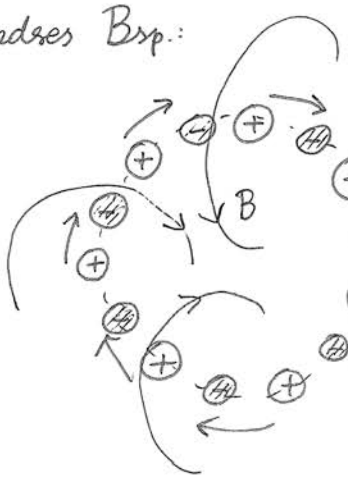
$$E'_x(\vec{r}',t') = E_x(\vec{r},t) \quad \text{und} \quad B'_x(\vec{r}',t') = B_x(\vec{r},t)$$

$$E'_y(\vec{r}',t') = \frac{1}{\sqrt{}}\left(E_y(\vec{r},t) - \frac{v}{c}B_z\right)$$

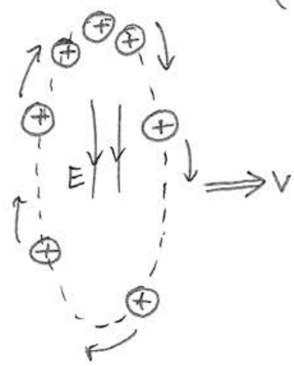
$$\text{und} \quad B'_z(\vec{r}',t') = \frac{1}{\sqrt{}}\left(B_z(\vec{r},t) - \frac{v}{c}E_y\right)$$

[CGS]

andres Bsp.:



(Kreisbewegung
von positiven Ladungen)
$\Rightarrow$ magn. Moment



(Regel: in Bewegungsrichtung vorne "passieren die Dinge später")

magn. Moment &
elektrisches Dipolmoment!
$\Downarrow$
Spürt Kraft im elektrischen Feld!

$\Rightarrow$ Auch ϱ (Ladungsdichte) und $\vec{j}$ müssen transformiert werden!

$(c\varrho, \vec{j})$ wie $(ct, \vec{r})$
"Vierervektor" (s.u.)

Formalismus:

Vierervektor $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ "kontra-variant"

$(x^0)^2 - \vec{x}^{\,2} = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ erhalten unter Lorentztransf.!

Def.: $x_\mu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$ "ko-variant"

$\Rightarrow \quad x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - \vec{x}^{\,2} = \text{invariant}$

Summation über gleichen Index (Einstein)

L.T.: $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x'^\nu$

mit $\Lambda^\mu{}_\nu \hat{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\;}} & \frac{v/c}{\sqrt{\;}} & & \\ \frac{v/c}{\sqrt{\;}} & \frac{1}{\sqrt{\;}} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$\Lambda_\mu{}^\nu \hat{=} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\;}} & \frac{-v/c}{\sqrt{\;}} & & \\ \frac{-v/c}{\sqrt{\;}} & \frac{1}{\sqrt{\;}} & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$ (Heben/Senken eines räumlichen Index gibt -1)

$$x^\mu x_\mu = (\Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu)(\Lambda_\mu{}^\lambda x'_\lambda)$$
$$= x'^\nu \underbrace{(\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\lambda)}_{\equiv \delta_\nu{}^\lambda} x'_\lambda = x'^\nu x'_\nu \quad \checkmark$$

andere Vierervektoren:

Vierer-Impuls $P = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = \text{const} = (m_0 c)^2$

↑ Ruhemasse

4-Wellenvektor $K = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right)$

~~Ableitungen~~ 4-Vektorpotential $(\phi, \vec{A})$ [CGS]

4-Strom $(c\rho, \vec{j})$

Ableitungen: $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Feldtensor:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ & 0 & -B_z & B_y \\ \text{anti-} & & 0 & -B_x \\ \text{symm.} & & & 0 \end{bmatrix}$$

[CGS]
$\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\phi$
$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\Rightarrow$ Transformation:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_{\tilde{\mu}} \Lambda^\nu{}_{\tilde{\nu}} F^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$$

($\Rightarrow$ Glg.en für $\vec{E}, \vec{B}$)

Dynamik:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}$$

mit $\vec{p} \equiv \dfrac{\overset{\text{Ruhemasse!}}{m_0}\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \equiv m\vec{v}$

m: nimmt zu, $\to \infty$ für $v \uparrow c$!

Arbeit: $\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \ldots = \underbrace{m(\vec{v}_B)c^2}_{E_B} - \underbrace{m(\vec{v}_A)c^2}_{E_A}$

$$\boxed{E = mc^2}$$

oder: $\boxed{E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 \vec{p}^{\,2}}}$

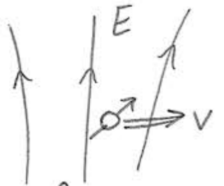
Dirac-Gleichung

Erwartungen für relativistische QM:

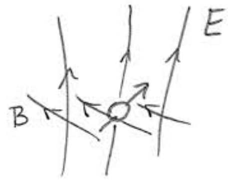
- Massenzunahme, $E=\hbar\omega=\sqrt{(m_0c^2)^2+c^2p^2} \overset{?!}{=} \sqrt{(m_0c^2)^2+c^2\hbar^2k^2}$

  $\Rightarrow$ Suche Wellengl. mit dieser Dispersionsrelation!

- Lorentz-Kontraktion von Wellenpaketen, Zeitdilatation
- Spin-Bahn-Kopplung:



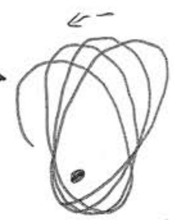
Labor



Teilchen $\Rightarrow$ Spin präzediert in $B \approx \frac{v}{c} E$

- Coulomb-Kepler-Problem ($\Rightarrow$ H-Atom)

klassische Bahnen



nichtrelativistisch

(spezielle) relativistisch: Periheldrehung

$$\Rightarrow \quad E_{n,l} \equiv E(n) \simeq -\frac{13.6\,eV}{n^2} \qquad \Rightarrow \quad E_{n,l} \equiv E(n,l)\,?$$

- Neue dimensionslose Größe:

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\hbar c} \quad \left(= \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \right) \approx \frac{1}{137}$$

[CGS] Sommerfelds Feinstrukturkonstante

(Bem.: Nichtrelativist. H-Atom hat <u>keine</u> dim.-lose Größe!)

$q_e, \hbar, m_e \not\Rightarrow \ldots$

Erster Versuch: "Klein-Gordon-Glg."

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + c^2 \vec{p}^{\,2}$$

$$E = \hbar\omega, \qquad \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

$$\overset{?}{\Rightarrow}$$

$$+(i\hbar\partial_t)^2 \psi = (m_0 c^2)^2 \psi + c^2(-i\hbar\vec{\nabla})^2 \psi$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \psi - \vec{\nabla}^2 \psi = -\frac{(m_0 c^{\cancel{2}})^2}{\hbar^2}\psi \qquad \text{lorentzinvariant} \checkmark$$

Zwei Probleme:

- Eigenenergieen $E = \pm\sqrt{\ldots\ldots}$ ↯

  negative En. ? [bleibt bei Dirac-Glg. ebenso!]

- Erhaltene Dichte:

  $$\rho \sim i(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*)$$

  kann negativ werden! ↯

Neuer Versuch: <u>Erste</u> Ordnung DGl (mit ∂_t & ∂_x)

Bsp.: Maxwell-Glg.en

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}$$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \vec{\nabla}^2\right)\vec{E} = 0$$

$\Rightarrow$ Vektorglg.en? bzw.: mehrkomponentiges ψ ?

$$i\hbar\partial_t\psi = \hat{H}\psi$$

$$\hat{H} = ? \quad \text{mit} \quad E = \sqrt{\ldots}$$

Erinnerung:

2-Niv.-System

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & g \\ g & -E_0 \end{pmatrix} \Rightarrow E = \pm\sqrt{E_0^2 + g^2}$$

1D: $\hat{H} = \begin{pmatrix} m_0c^2 & c\hat{p}_x \\ c\hat{p}_x & -m_0c^2 \end{pmatrix} = m_0c^2\,\hat{\sigma}_z + c\hat{p}_x\,\hat{\sigma}_x$

$\Rightarrow E = \pm\sqrt{(m_0c^2)^2 + (cp_x)^2}$ ✓ ☺

(für ebene Wellen)

2D: $\hat{H} = (m_0c^2)\hat{\sigma}_z + c\hat{p}_x\,\hat{\sigma}_x + c\hat{p}_y\,\hat{\sigma}_y$

$\Rightarrow E = \pm\sqrt{(m_0c^2)^2 + (c\vec{p})^2}$ ✓ ☺

[Anwendung: e^- in Graphen, dort eff. $m_0 = 0$, $c \approx 10^6\,\frac{m}{s}$]
=C-Schicht

3D: $\hat{H} = \ldots$? Es fehlt eine Matrix!
(wir hatten alle 3 Paulimatrizen verwendet!)

Ansatz: $\hat{H} = \hat{\beta}(m_0c^2) + c\hat{\vec{p}}\cdot\hat{\vec{\alpha}}$ $\rightarrow \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_x \\ \hat{\alpha}_y \\ \hat{\alpha}_z \end{pmatrix}$

Wollen $E^2 \stackrel{!}{=} \hat{H}^2 = \hat{\beta}^2(m_0c^2)^2 + (c\hat{p}_x)^2\hat{\alpha}_x^2 + (c\hat{p}_y)^2\hat{\alpha}_y^2 + (c\hat{p}_z)^2\hat{\alpha}_z^2$

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{cases} + (\hat{\beta}\hat{\alpha}_x + \hat{\alpha}_x\hat{\beta})(m_0c^2)(c\hat{p}_x) + \ldots \\ + (\hat{\alpha}_x\hat{\alpha}_y + \hat{\alpha}_y\hat{\alpha}_x)(c\hat{p}_x)(c\hat{p}_y) + \ldots \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Brauchen 4 Matrizen $\hat{\beta}, \hat{\alpha}_x, \hat{\alpha}_y, \hat{\alpha}_z$ mit

$\hat{\beta}^2 = \hat{\alpha}_j^2 = \mathbb{1}$ und $\{\hat{\beta}, \hat{\alpha}_j\} = 0$

und $\{\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j\} = 0 \quad (i \neq j)$

[Check: war ✓ in 2D]

Das geht mit 4×4-Matrizen:
viele Möglichkeiten [nicht eindeutig!]

z.B.
$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_j = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_j \\ \hat{\sigma}_j & 0 \end{pmatrix}$$

oder [Dirac:]
$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_j = \begin{pmatrix} -\hat{\sigma}_j & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_j \end{pmatrix}$$

Dirac-Glg. für Elektronen:
$$\boxed{i\hbar \partial_t \psi = \left[\hat{\beta} m_0 c^2 + c\, \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{\alpha}}\right] \psi}$$

4-komponentiger "Spinor"
(<u>kein</u> 4-Vektor!)