2. Spin-Korrelationen im Singulett-Zustand

(a.) Für Pauli-Matrizen gilt:

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \hat{\sigma}_k$$

$\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_x$
$\hat{\sigma}_2 = \hat{\sigma}_y$
$\hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_z$

$$\rightarrow \{ \hat{\sigma}_i , \hat{\sigma}_j \} = 2 \delta_{ij} \mathbb{1}$$

Damit erhält man für dens Spinoperator $\hat{\vec{S}} = \frac{\hbar}{2} \hat{\vec{\sigma}}$

$$(\vec{a} \cdot \hat{\vec{S}})^2 = \frac{\hbar^2}{4} \left[a_x \hat{\sigma}_x + a_y \hat{\sigma}_y + a_z \hat{\sigma}_z \right]^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \underbrace{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}_{|\vec{a}|^2 = 1} \mathbb{1} + \underbrace{\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_z\}}_{=0} a_x a_z + \underbrace{\{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\}}_{=0} a_x a_y$$

$$+ \underbrace{\{\hat{\sigma}_y , \hat{\sigma}_z\}}_{=0} a_y a_z$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}$$

$\rightarrow$ Mögliche Eigenwerte von $\vec{a} \cdot \hat{\vec{S}}$ sind $\pm \frac{\hbar}{2}$.

$$tr(\vec{a} \hat{\vec{S}}) = tr \begin{bmatrix} \frac{\hbar}{2} a_z & \frac{\hbar}{2}(a_x - i a_y) \\ \frac{\hbar}{2}(a_x + i a_y) & -\frac{\hbar}{2} a_z \end{bmatrix} = 0$$

Die Spur ist invariant unter Basistransformation und gleich der Summe der Eigenwerte.

$\rightarrow$ $\underline{\vec{a} \hat{\vec{S}} \text{ hat die Eigenwerte } -\frac{\hbar}{2} \text{ und } +\frac{\hbar}{2}}$.

(b.) $\vec{a}\hat{\vec{S}}_1$, $\vec{b}\hat{\vec{S}}_2$ kommutieren (sie wirken auf unterschiedliche Teilchen 1, 2) und damit ~~auf d~~ sind die Messergebnisse von $(\vec{a}\hat{\vec{S}}_1)(\vec{b}\hat{\vec{S}}_2)$ Produkte der Messergebnisse von $(\vec{a}\hat{\vec{S}}_1)$ und $(\vec{b}\hat{\vec{S}}_2)$.

$\rightarrow$ $(\vec{a}\hat{\vec{S}}_1)(\vec{b}\hat{\vec{S}}_2)$ nimmt die Werte $\pm \hbar^2/4$ an.

$$\langle\psi|(\vec{a}\hat{\vec{S}}_1)(\vec{b}\hat{\vec{S}}_2)|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{2}\langle\psi|(\vec{a}\hat{\vec{S}}_1)\Big[\underbrace{b_x(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle) + b_y i(-|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle) + b_z(-|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)}_{= |\uparrow\uparrow\rangle(b_x - ib_y) + |\downarrow\downarrow\rangle(-b_x - ib_y) + b_z(-|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)}\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\langle\psi|\Big[a_x(b_x - ib_y)|\downarrow\uparrow\rangle + a_x(-b_x - ib_y)|\uparrow\downarrow\rangle + a_z b_z(-|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$
$$+ ia_y(b_x - ib_y)|\downarrow\uparrow\rangle - ia_y(-b_x - ib_y)|\uparrow\downarrow\rangle\Big]$$

Terme mit $|\uparrow\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\downarrow\rangle$ werden weggelassen, da $\langle\psi|\uparrow\uparrow\rangle = 0$ und $\langle\psi|\downarrow\downarrow\rangle = 0$.

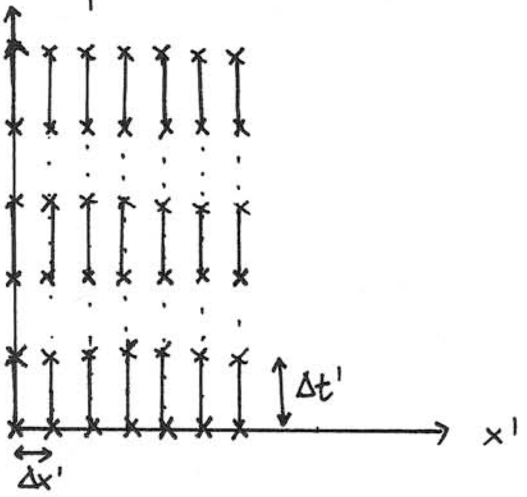
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\hbar^2}{4}\langle\psi|\Big[(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)\overbrace{(-a_z b_z - a_x b_x - a_y b_y)}^{-\vec{a}\cdot\vec{b}}$$
$$+ (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)(-i a_x b_y + i a_y b_x)\Big]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{=1} = \underline{-\frac{\hbar^2}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

[Siehe J.S. Bell "On the Einstein Podolsky Rosen paradox", Physics 1, 195-200 (1964)]

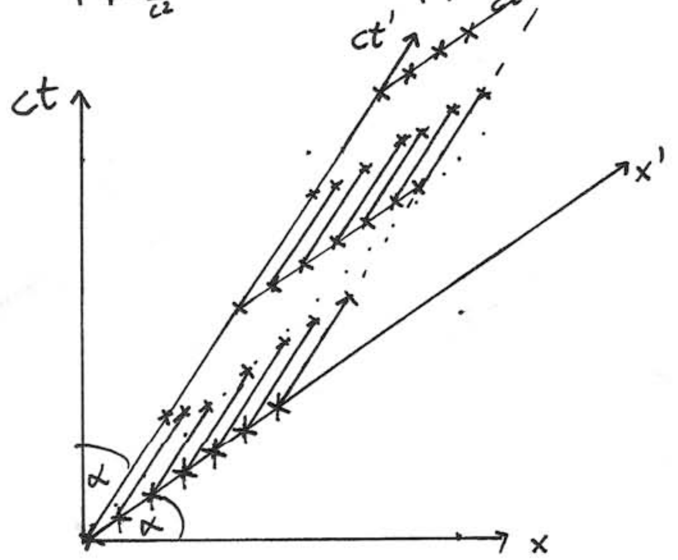
2. Lorentztransformationen

a)



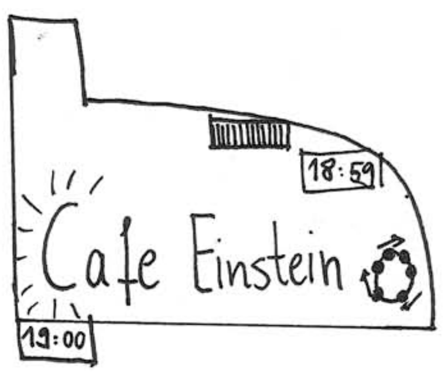
b) Lorentztransformation zwischen Bezugssystem der Erde (x, ct) und dem Ruhesystem des Raumschiffes (x', ct'):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

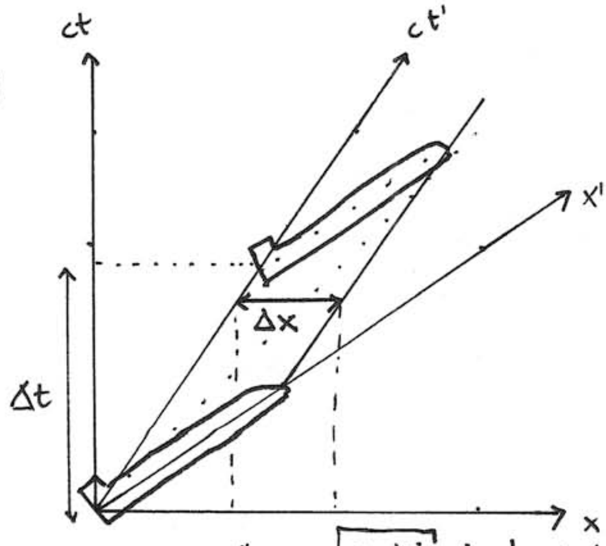


$\tan \alpha = \frac{v}{c}$

c)



d)



$\Delta x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \Delta x' < \Delta x'$ Längenkontraktion

$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} > \Delta t'$ Zeitdilatation