

6.2 Volle Maxwellgleichungen in Materie

In $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} :$

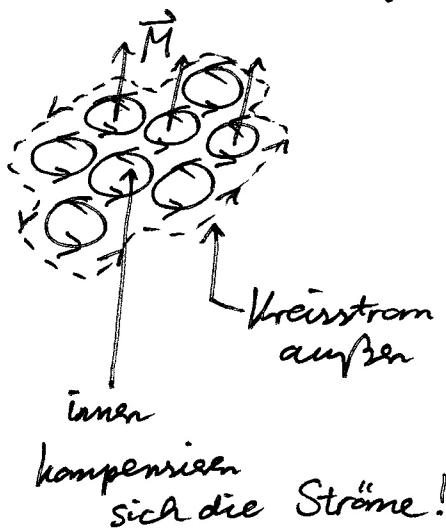
$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \Bigg\} \vec{j}_{\text{real}}$$

(Erinnerung: für einzelnen Dipol ist $\vec{j}(\vec{r}) = \dot{\vec{p}} \delta^3(\vec{r})$)

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{frei}} + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}}$$

Weiterhin: magnetische Momente \Rightarrow

Magnetisierung (Magn. dichte) $\vec{M} = \frac{\text{magn. Moment}}{\text{Volumen}}$



Es gilt:

$$\vec{j}_{\text{mag}} = \text{rot } \vec{M}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{real}} + \vec{j}_{\text{mag}}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{frei}} + \mu_0 \text{rot } \vec{M} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \underbrace{(\vec{B} - \mu_0 \vec{M})}_{\equiv \mu_0 \vec{H}} = \mu_0 \vec{j}_{\text{frei}} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \stackrel{\equiv}{=} \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

falls $\vec{M}(\vec{H})$ linear
(mit $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$)

\Rightarrow

Maxwellglg.en in Materie:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = S_{\text{frei}}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

und ~~die~~

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

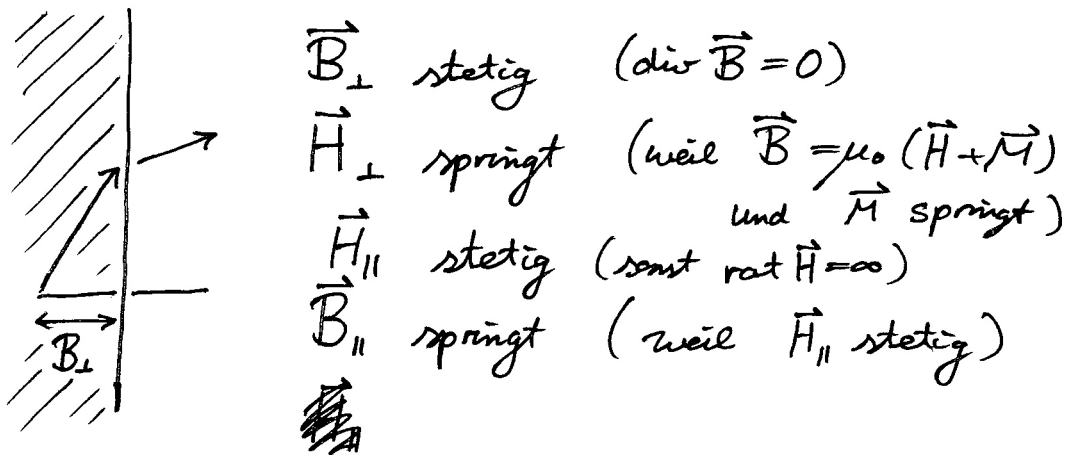
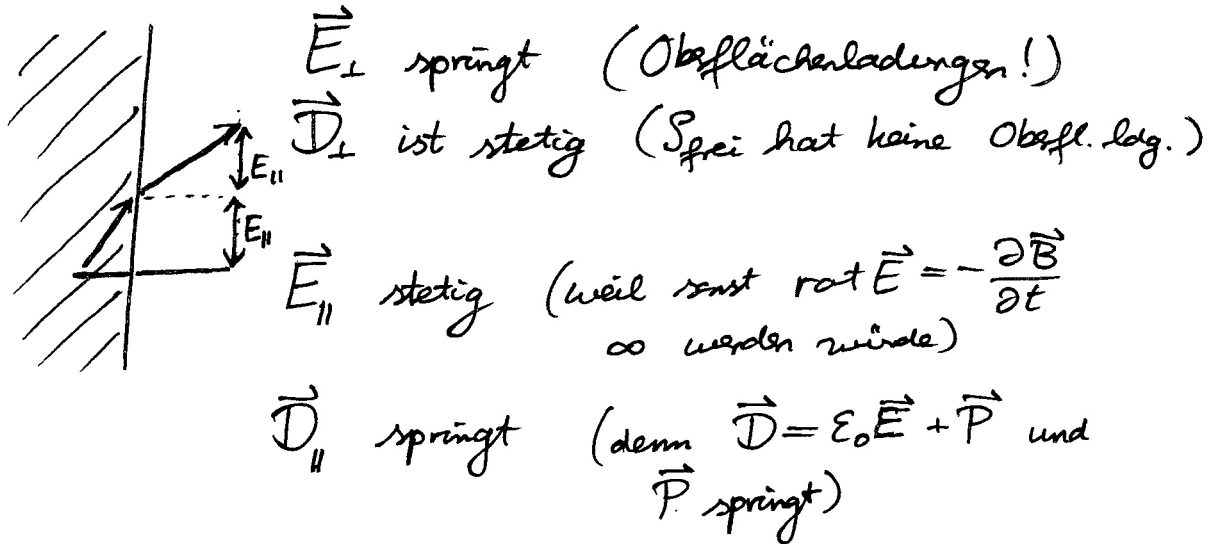
$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

für lineare Materialien

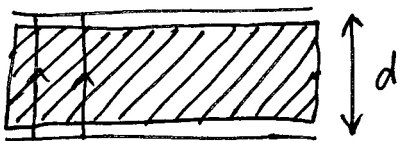
$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

6.3 Randbedingungen



Bsp.: Plattenkondensator mit Medium



$$\vec{D} = \begin{cases} \text{außen: } \epsilon_0 E_{\text{außen}} \\ \text{innen: } \epsilon_0 \epsilon_r E_{\text{innen}} \end{cases} \stackrel{!}{=} \quad (\text{denn } \vec{D}_\perp \text{ Oberfläche})$$

$$\Rightarrow E_{\text{innen}} = \frac{E_{\text{außen}}}{\epsilon_r}$$

$$E_{\text{außen}} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \text{ vorgegeben}$$

$$\Rightarrow \text{Potentialdifferenz } \int \vec{E} d\vec{s} = d \cdot \frac{\rho_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_r} \cdot (\text{Resultat ohne Matrix})$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\phi_1 - \phi_2} = \frac{A}{d} \epsilon_0 \epsilon_r$$

6.4 Wellen in Materie

lineares (isotropes) Medium:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

rot ||

$$\text{rot rot } \vec{H} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{rot } \vec{E}}_{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

im homogenen Medium: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$ ← nicht abhängig

↓ (mit $\text{div } \vec{B} = 0$)

$$\frac{-\Delta \vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = -\epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\left(\Delta - \underbrace{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r \mu_r}_{\frac{1}{c'^2}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0$$

$\frac{1}{c'^2}$ ← veränderte Wellengeschwindigkeit

$$c' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}}_c \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}}_{\frac{1}{n}}$$

(im Vakuum)

Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

mit Frequenzabhängigkeit:

Ansatz ~~$\vec{B} = \vec{B}_0 e$~~

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

(wsw.)

$$\Rightarrow \dots \quad \vec{B}_0(\vec{r}) = \underbrace{\mu_0 \mu_r(\omega)}_{\text{komplexe relative magnetische Permeabilität}} \vec{H}_0(\omega)$$

komplexe
relative magnetische
Permeabilität

analog $\epsilon_r(\omega)$

& dann am Ende:

$$n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega) \mu_r(\omega)} = \text{Re } n(\omega) + i \text{Im } n(\omega)$$

komplex!

Bedeutung eines komplexen Brechungsindex?

Eine Welle: Ansatz

$$\vec{E}, \vec{B} \sim e^{i(kz - \omega t)}$$

$$\Rightarrow -k^2 + \frac{n^2}{c^2} \omega^2 = 0$$

$$k^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2$$

$$k = (\pm) \frac{n}{c} \omega$$

$$\Rightarrow e^{ikz} = e^{i \left(\frac{\text{Re } n}{c} \omega \right) z} e^{- \left(\frac{\text{Im } n}{c} \omega \right) z}$$

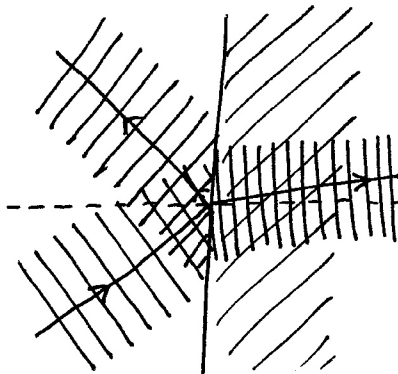
veränderte
Wellenlänge:

$$k_{\text{Materie}} = (\text{Re } n) \cdot k_{\text{Luft}}$$

$$\lambda_{\text{Materie}} =$$

Abklingen durch
Absorption!

6.5 Elektromagnetische Wellen an der Oberfläche zweier Materialien



Vgl.:

QM

"Separation der Variablen"

$$\Psi(x,y) = \underbrace{\Psi(x)}_{\text{streu}} \cdot e^{ik_y y}$$

$$(\Rightarrow k'_y = k_y)$$

Brauchen nur 1D-Probleme lösen!

$$\text{Grund: } E = \hbar\omega = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2)$$

$$= E_x + E_y$$

Summe!

Ψ stetig an Oberfläche

EM

$$\omega = c|\vec{k}|$$

$$= c\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \neq \omega_x + \omega_y$$

und

Vektorfeld!

$$\vec{E}, \vec{B}$$

Anschlussbedingungen!

(E_{\perp} springt usw.)

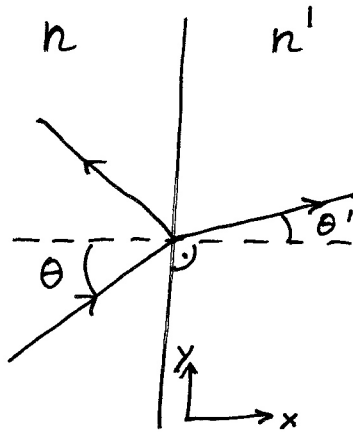
Ansatz:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{cases} \text{links: einfallende + reflektierte Welle} \\ \quad \{ \vec{E} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \vec{E}^r e^{i\vec{k}^r\vec{r}} \} e^{-i\omega t} \\ \text{rechts: } \vec{E}^t e^{i\vec{k}^t\vec{r}} e^{-i\omega t} \\ \quad \text{transmittierte Welle} \end{cases}$$

Stetigkeit $E_{\parallel}^{\text{links}}(\vec{r}, t) = E_{\parallel}^{\text{rechts}}(\vec{r}, t) \quad \forall \vec{r} \in \text{Oberfläche}$

$$\Rightarrow \vec{k}_{\parallel}^r = \vec{k}_{\parallel} = \vec{k}_{\parallel}^t \quad (\text{sonst: Schmelung!})$$

"Impulserhaltung"
parallel zur Oberfläche
[genaus in QM]



(xy-Ebene sei Ebene
⊥ Oberfläche des einfallenden
Strahls)

links: $\omega = \frac{c}{n} |\vec{k}| = \frac{c}{n} |\vec{k}^r|$

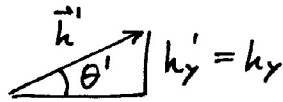
also $|\vec{k}| = |\vec{k}^r|$ und $k_{\parallel} = k_{\parallel}^r$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{Diagram: A circle in the } k_x-k_y \text{ plane. The incident wave vector } \vec{k} \text{ is in the first quadrant, the reflected } \vec{k}^r \text{ is in the second quadrant, and the refracted } \vec{k}^t \text{ is in the first quadrant. The horizontal components are equal.} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} k_y^r = k_y \\ k_x^r = -k_x \end{array}$$

\Rightarrow Einfallswinkel = Ausfallswinkel!

links-rechts:

$$\omega = \frac{c}{n} |\vec{k}| \stackrel{!}{=} \frac{c}{n'} |\vec{k}'|$$



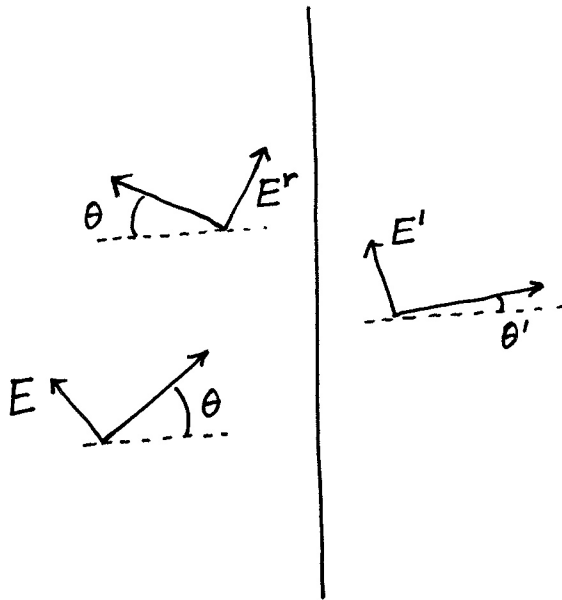
$$\sin \theta' = \frac{k_y'}{|\vec{k}'|} = \frac{k_y}{\frac{n'}{n} |\vec{k}|} = \frac{n}{n'} \sin \theta$$

Snellsches Brechungsgesetz

$$n' \sin \theta' = n \sin \theta$$

Amplituden der Wellen?

Hier: Betrachte $\vec{E} \parallel$ Einfallsebene [interessanter Fall]



(Bem.: $\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$
gilt auch
im Medium)

$$E_{\parallel} + E_{\parallel}^r = E'_{\parallel}$$

$$\rightarrow (E + E^r) \cos \theta = E' \cos \theta' \quad [1]$$

$$D_{\perp}^e + D_{\perp}^r = D'_{\perp}$$

$$-\epsilon_r E \sin \theta + \epsilon_r E^r \sin \theta = -\epsilon_r' E' \sin \theta' \quad [2]$$

z.B. eliminiere E' aus [1] \Rightarrow in [2]

$$\epsilon_r (E - E^r) \sin \theta = \epsilon_r' \sin \theta' \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} (E + E^r)$$

nach E^r auflösen \Rightarrow

$$E - E^r = \underbrace{\frac{\epsilon_r'}{\epsilon_r} \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\cos \theta'}}_{\equiv A} (E + E^r)$$

$$E^r (1 + A) = E (1 - A)$$

$$E^r = \frac{1 - A}{1 + A} E$$

$$\text{mit } A = \frac{\epsilon_r'}{\epsilon_r} \frac{n}{n'} \frac{\cos \theta}{\cos \theta'}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta'} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

speziell mit $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$: falls $\mu_r = 1 = \mu_r'$:

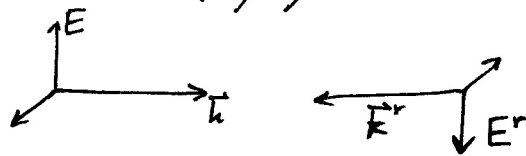
$$A = \frac{n'}{n} \frac{\cos \theta}{\cos \theta'}$$

z.B.: $n' > n \Rightarrow$
(Luft \rightarrow Glas)

für $\theta \rightarrow 0$ ($\theta' \rightarrow 0$) ist

$$A = \frac{n'}{n} > 1 \Rightarrow \frac{E^r}{E} \text{ ist negativ}$$

für $\mu_r = \mu_r' = 1$



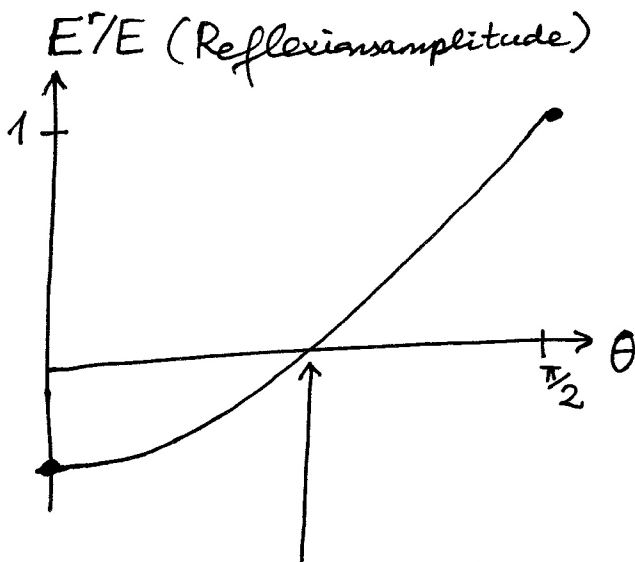
$\Rightarrow \vec{E}$ an Oberfläche reduziert

$$\left(\frac{n'}{n} \rightarrow \infty \Rightarrow E^r = -E\right)$$

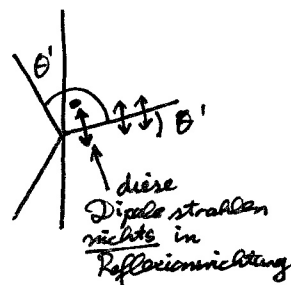
\Rightarrow Knoten an Oberfläche in \vec{E}

aber: für $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ wird $\theta' < \frac{\pi}{2}$ sein \Rightarrow

$$\frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \rightarrow 0 \Rightarrow A \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{E^r}{E} = 1$$



Qualitative Erklärung für Brewster-Winkel:



Hier: keine Reflexion, volle Transmission!

"Brewster-Winkel"

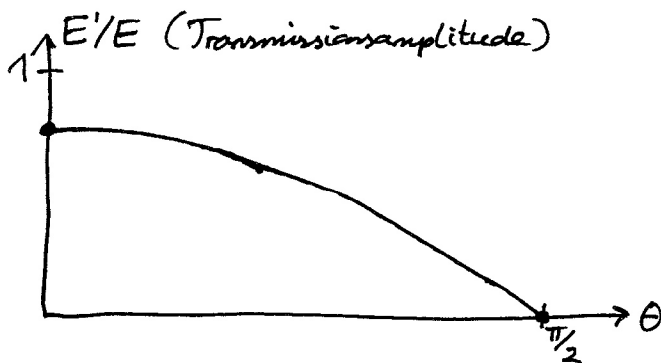
$$\text{für } A=1 \Leftrightarrow \frac{n'}{n} = \frac{\cos \theta'}{\cos \theta}$$

" (bei $\mu_r = \mu_r' = 1$)

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} \Leftrightarrow \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

Transmittiertes Feld:

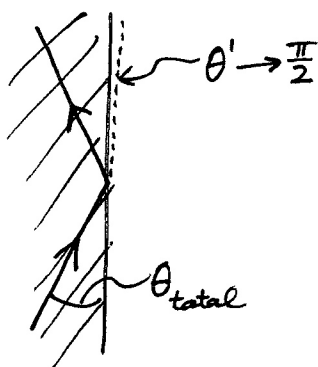
$$E^t = (E + E^r) \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} = \frac{2}{1+A} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \cdot E$$



falls $n' < n$
(glas \rightarrow Luft)

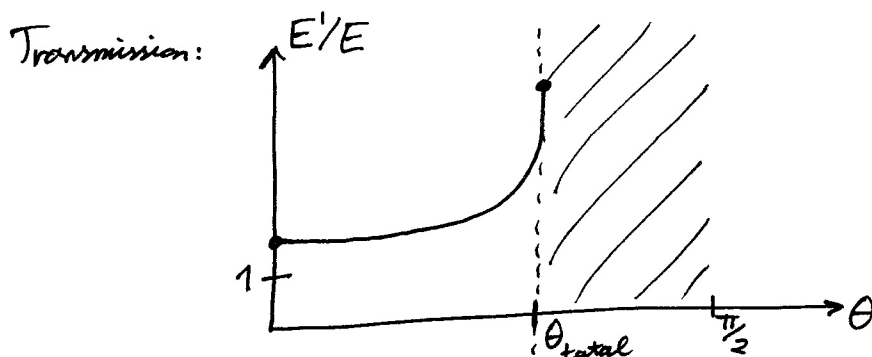
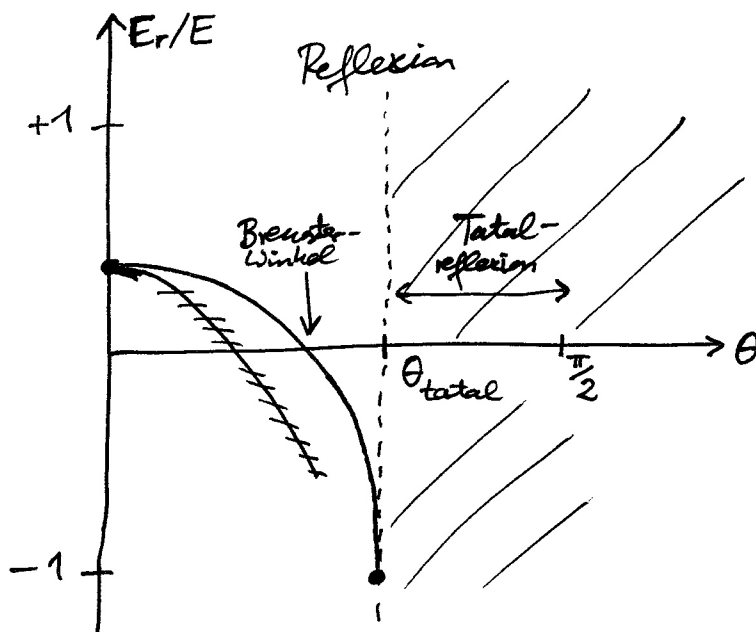
$$n' \sin \theta' = n \sin \theta$$

hat für $\sin \theta \geq \frac{n'}{n}$ keine Lsg. mehr
 \Rightarrow keine transmittierte Welle
"innere Totalreflexion"



$$\theta, \theta' \rightarrow 0: A = \frac{n'}{n} < 1 \quad ; \quad \theta' \rightarrow \frac{\pi}{2}: A = \frac{n'}{n} \frac{\cos \theta}{\cos \theta'} \rightarrow \infty$$

$$\frac{E_r}{E} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_r}{E} \rightarrow -1$$



7

Andere Konfiguration: \vec{E}_\perp Einfallsebene
 \Rightarrow ~~no~~ $\vec{E} \parallel$ Oberfläche
(keine \vec{E}_\perp -Komponente)

\Rightarrow kein Brewsterwinkel ($\frac{E_r}{E} \neq 0$)

aber sonst analog.
