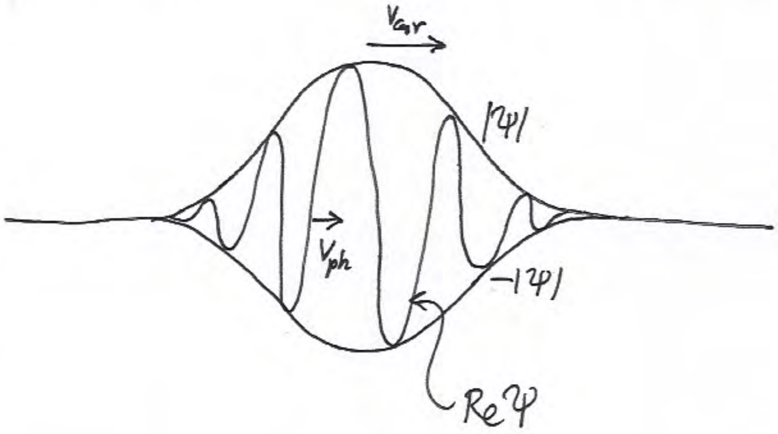
Gruppen- vs. Phasengeschwindigkeit



$\bar{x}$ bewegt sich mit $v_{gr} = \frac{\bar{p}}{m} = \frac{\hbar \bar{k}}{m}$ (siehe oben) : "Gruppengeschwindigkeit" (für Wellenpakete) = "physikalische Geschw.keit"

Nulldurchgänge von $\mathrm{Re}\,\Psi$ bewegen sich mit

$v_{ph} = ?$ "Phasengeschwindigkeit" (für Wellenfronten)

$$\Psi \sim \underbrace{(///)}_{\substack{\text{Form} \\ (\in \mathbb{R})}} \cdot e^{i\overbrace{(\bar{k}x - \omega_{\bar{k}} t)}^{\text{Phase}}}$$

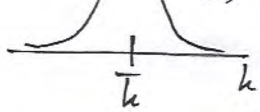
$$\bar{k}x - \omega_{\bar{k}} t = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \underbrace{\frac{\omega_{\bar{k}}}{\bar{k}}}\, t$$

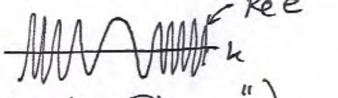
$$\Rightarrow v_{ph} = \frac{\omega(\bar{k})}{\bar{k}} = \frac{\hbar \bar{k}}{2m} = \frac{1}{2} v_{Gr}$$

Ganz allgemein, für beliebige Wellen:
Für beliebiges $\omega(k)$:

$$\int dk \; C(k)\, e^{i\underbrace{(kx - \omega(k)t)}_{\varphi}}$$



Größte Beiträge bei x wo



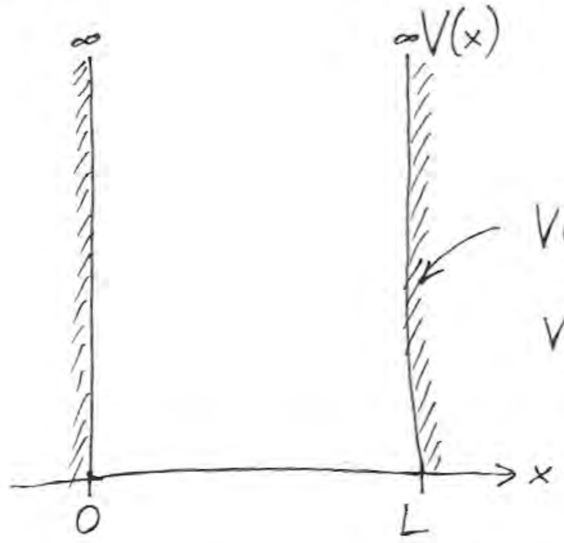
$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial k}\right|_{k=\bar{k}} \overset{!}{=} 0 \qquad (\text{"stationäre Phase"})$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \underbrace{\frac{\partial \omega(k)}{\partial k}}_{\substack{\parallel \\ v_{Gr}}} \cdot t$$

Dagegen Phase: $\bar{k}x - \omega(\bar{k})t \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad x = \underbrace{\frac{\omega(\bar{k})}{\bar{k}}}_{\substack{\parallel \\ v_{ph}}} \cdot t$$

2.2 Das Teilchen im Kasten (und auf dem Ring)



$V(x) = \infty$ außerhalb von $x \in [0, L]$

$V(x) = 0$ für $x \in [0, L]$

$\Rightarrow$ Eigen-Energieen & Energie-Eigenfunktionen?

~~Zuerst: Randbedingungen~~

SGl: $$E\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x) + V(x)\phi(x)$$

~~E gegeben~~

Wir brauchen: $\phi(x) \equiv 0$ dort, wo $V(x) = \infty$
(sonst: $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \infty$ ↯)

Im Kasten, $x \in [0, L]$:

$$\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} = -\overbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}^{k^2 \ \equiv \ (\text{Def.})}\phi(x) = -k^2\phi(x)$$

$\Rightarrow$ Lösungen von der Form

$$\phi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$$

wissen:

$\phi(0) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow B = 0$

$\phi(L) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A\sin(kL) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow kL = n\pi$ (mit $n = 1, 2, 3, \ldots$)
($n=0$ ist schlecht, weil dann $\phi \equiv 0$ überall)

$\Rightarrow$ setze $k_n = \frac{n\pi}{L}$ diskrete Werte!

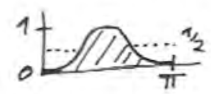
$n = 1, 2, 3, \ldots$
Quantenzahl

$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} \quad \text{mit} \quad k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{und} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\phi_n(x) = \underbrace{A_n}_{\text{aus Normierungsbed.:}} \sin(k_n x)$$

$$1 \overset{!}{=} \int_0^L |\phi_n(x)|^2 \, dx = |A_n|^2 \underbrace{\int_0^L \sin^2(k_n x)\, dx}_{\frac{1}{2} \cdot L}$$

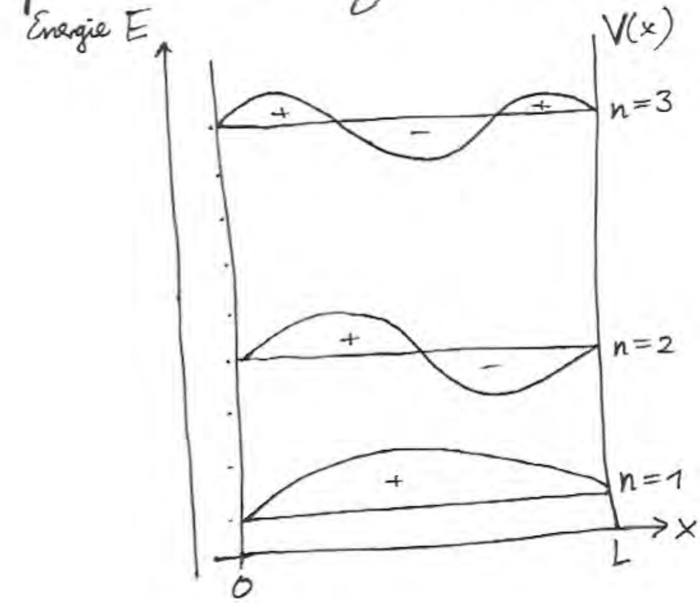
weil $\sin^2(..)$ gemittelt über eine halbe Periode gleich $1/2$ ist.



$$\Rightarrow |A_n|^2 = \frac{2}{L}$$

$\Rightarrow$ setze $A_n = \sqrt{\frac{2}{L}}$

Graphische Darstellung der Lösung:



Diskrete Energieniveaus!

$$E_n \sim \frac{n^2}{L^2}$$

← "Grundzustand" (niedrigste Energie)

Bem.: $E_{n=1} > 0$! „Nullpunktsenergie"

Allgemeines Schema für Energieen & Eigenfunktionen von $\hat{H}$

1. $V(x) = ?$
2. Randbedingungen für Wellenfkt.?
   (für gebundene Zustände: $\phi(x) \to 0$ für $|x| \to +\infty$)
3. Ansatz für Lsg.
4. Randbed. erzwingen diskrete Energiewerte
5. Normierung der Wellenfkt.

Bem.:

- Wenn $\hat{H}$ reell [kein Magnetfeld], dann können die ϕ_n reell gewählt werden
- In 1D: Je ein "Knoten" (Nulldurchgang) mehr für $n \mapsto n+1$

3. Formalismus der Quantenmechanik

3.1 Hilbertraum und Operatoren

Betrachte alle Wellenfunktionen $\phi(\vec{r})$ mit

$$\int |\phi(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} < \infty$$

Man sagt: $\phi \in L_2(\mathbb{R}^3)$
↳ quadrat-integrabel

Diese bilden einen <u>Vektorraum</u> $\mathcal{H}$:

$$\forall\ \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H} \Rightarrow \phi = \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 \in \mathcal{H}$$
$$(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C})$$

Notation:

$$\underbrace{|\phi\rangle}_{\text{Vektor}} \in \mathcal{H}$$

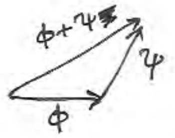
(wir schreiben <u>nicht</u> $\cancel{|\phi(\vec{r})\rangle}$)

Man kann ein <u>Skalarprodukt</u> definieren:

$$\underbrace{\underbrace{\langle\phi|}_{\text{"bra"}}\underbrace{\psi\rangle}_{\text{"ket"}}}_{\text{"bracket"}} \equiv \int d^3\vec{r}\ \phi^*(\vec{r})\,\psi(\vec{r})$$

Es gilt dann z.B.: $\langle\phi|\phi\rangle \in \mathbb{R}_0^+$

$$\langle\phi|\lambda\psi\rangle = \lambda\langle\phi|\psi\rangle$$
$$\langle\lambda\phi|\psi\rangle = \lambda^*\langle\phi|\psi\rangle \quad \text{(weil dann: } \int d^3\vec{r}\,[\lambda\phi(\vec{r})]^*\psi(\vec{r}) \text{)}$$



$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*$$
$$\sqrt{\langle\phi+\psi|\phi+\psi\rangle} \leq \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle} + \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ ist ein "<u>Hilbertraum</u>"
(Vektorraum mit Skalarprodukt)

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 \leq \langle\phi|\phi\rangle\langle\psi|\psi\rangle$$
(Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

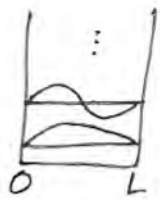
Eine (diskrete) <u>vollständige Orthonormalbasis</u> (VONB) $\{|\phi_n\rangle\}$
ist ein Satz von Vektoren mit

$$\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so dass für alle $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\underbrace{\sum_n |\phi_n\rangle \underbrace{\langle\phi_n|\Psi\rangle}_{\text{Koeffizient} \in \mathbb{C}}}_{\text{Entwicklung von } |\Psi\rangle \text{ in dieser VONB}} = |\Psi\rangle$$

Beispiel: Satz von Eigenfunktionen im Kasten



hier: $\{|\phi_n\rangle\}$ ist VONB
für $L_2([0,L])$
(mit Bedingung $\Psi(0) = \Psi(L) = 0$)

Man schreibt daher:

$$\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \mathbb{1}$$

wobei der Operator $\hat{A}_n = |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$
auf $|\Psi\rangle$ angewendet wird im
folgenden Sinne:

$$\hat{A}_n|\Psi\rangle = |\phi_n\rangle\underbrace{\langle\phi_n|\Psi\rangle}_{\in\mathbb{C}}$$

~~Matrixelemente eines beliebigen Operators $\hat{A}$ bezgl. einer VONB:~~

$$\cancel{\langle\phi_n|\hat{A}|\phi_m\rangle = \langle\phi_n|\hat{A}\phi_m\rangle = A_{nm}}$$

Skalarprodukt in einer Basis:

$$|\Psi\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\Psi\rangle$$

$\Rightarrow$

$$\langle\xi|\Psi\rangle = \sum_n \underbrace{\langle\xi|\phi_n\rangle}_{\substack{\| \\ \langle\phi_n|\xi\rangle^*}} \underbrace{\langle\phi_n|\Psi\rangle}_{\substack{\in \mathbb{C}: \\ \text{Entw. koeff. von} \\ |\Psi\rangle \text{ in dieser Basis}}}$$

kurz, mit $\left.\begin{array}{l} \langle\phi_m|\Psi\rangle \equiv \Psi_m \in \mathbb{C} \\ \langle\phi_n|\xi\rangle \equiv \xi_n \in \mathbb{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \langle\xi|\Psi\rangle = \sum_n \xi_n^* \Psi_n$

Matrixelemente eines beliebigen Operators $\hat{A}$ bzgl. einer VONB:

$$\langle\phi_n|\hat{A}\phi_m\rangle \equiv \langle\phi_n|\hat{A}|\phi_m\rangle = A_{nm}$$

[wir betrachten <u>lineare</u> Operatoren, wo gilt:

$$|\Psi\rangle = \lambda_1|\phi_1\rangle + \lambda_2|\phi_2\rangle$$
$$\Rightarrow \hat{A}|\Psi\rangle = \lambda_1\hat{A}|\phi_1\rangle + \lambda_2\hat{A}|\phi_2\rangle$$
]

Anwendung:

$$\hat{A}|\psi\rangle = \mathbb{1}\cdot\hat{A}\cdot\mathbb{1}|\psi\rangle$$
$$= \Big(\sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\Big)\hat{A}\Big(\sum_m |\phi_m\rangle\langle\phi_m|\Big)|\psi\rangle$$
$$= \sum_{n,m} |\phi_n\rangle \underbrace{\langle\phi_n|\hat{A}|\phi_m\rangle}_{\substack{A_{nm} \\ \text{Matrix-} \\ \text{elemente}}} \underbrace{\langle\phi_m|\psi\rangle}_{\substack{\in\mathbb{C}: \\ \text{Entwicklungskoeffizienten} \\ \text{von } |\psi\rangle \text{ in dieser Basis}}}$$

$$\Rightarrow \langle\xi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{n,m} \underbrace{\langle\xi|\phi_n\rangle}_{\substack{\| \\ \langle\phi_n|\xi\rangle^*}} A_{nm} \langle\phi_m|\psi\rangle$$

kurz, mit $\langle\phi_m|\psi\rangle \equiv \psi_m \in \mathbb{C}$

$\langle\phi_n|\xi\rangle \equiv \xi_n \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \langle\xi|\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{n,m} \xi_n^* \overbrace{A_{nm}\psi_m}^{\text{Anwendung}}$$

Anwendung einer Matrix auf einen Vektor:

$$(\hat{A}\psi)_n = \sum_m A_{nm}\psi_m$$

Operatorprodukt:

$$\langle\phi_n|\hat{A}\hat{B}|\phi_m\rangle = \sum_l \langle\phi_n|\hat{A}|\phi_l\rangle\langle\phi_l|\hat{B}|\phi_m\rangle$$
$$= \underbrace{\sum_l A_{nl} B_{lm}}_{\text{Matrixprodukt von } A \,\&\, B!}$$

Hermitesche Operatoren:

Zu $\hat{A}$ definiere $\underbrace{\hat{A}^+}$ über: → der "hermitesch adjungierte Operator"

$\forall\ |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$ sei:

$$\langle\phi|\hat{A}^+\psi\rangle = \langle\hat{A}\phi|\psi\rangle$$
$$= \langle\psi|\hat{A}\phi\rangle^*$$

$\Rightarrow$

$$(A^+)_{nm} = \langle\phi_n|\hat{A}^+|\phi_m\rangle$$
$$= \langle\phi_m|\hat{A}|\phi_n\rangle^* = A^*_{mn}$$

$\leftarrow$! komplex konjugiert

$\leftarrow$! umgedreht

Wenn $\hat{A}^+ = \hat{A}$, dann: "$\hat{A}$ ist hermitesch".

Beispiele für hermitesche Operatoren:

(Bem.: ab jetzt oft der Kürze halber $\vec{r} \mapsto x$)

Potential:

$$\int dx\ \phi^*(x)\ [V(x)\psi(x)]$$
$$\underset{\uparrow}{=} \int dx\ [V(x)\phi(x)]^*\ \psi(x)$$

weil $V(x) \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \hat{V}^+ = \hat{V}$$

(& speziell: $\hat{x}^+ = \hat{x}$, Ortsoperator, multipliziert mit dem Ort x)

Impuls:

$$\int dx\ \phi^*(x)\ \left[-i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right]$$
$$\underset{\uparrow}{=} \int dx\ \left[+i\hbar\ \frac{\partial\phi^*(x)}{\partial x}\right]\ \psi(x)$$

partielle Integration ($\phi\psi \to 0$ im Unendlichen)

$$= \int dx\ \left[-i\hbar\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\right]^*\ \psi(x)$$

$$\Rightarrow \hat{p}^+ = \hat{p}$$

genauso in 3D: $\hat{\vec{p}}^+ = \hat{\vec{p}}$

Beh.: $(\hat A \hat B)^+ = \hat B^+ \hat A^+$

Bew.:
$$\langle \phi \mid \hat B^+ \hat A^+ \psi \rangle = \langle \hat B \phi \mid \hat A^+ \psi \rangle$$
$$= \langle \hat A \hat B \phi \mid \psi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad (\hat p^2)^+ = \hat p^+ \hat p^+ = \hat p \hat p = \hat p^2$$

$\Rightarrow$ auch $\hat p^2$ ist hermitesch! (auch in 3D)

$$\cancel{\Rightarrow \quad \hat H = \frac{\hat p^2}{2m} + V(\hat x)}$$

Beh.: $(\lambda \hat A + \mu \hat B)^+ = \lambda^* \hat A^+ + \mu^* \hat B^+$

Bew.:
$$\langle \phi | \lambda^* \hat A^+ + \mu^* \hat B^+ | \psi \rangle = \langle \phi | \lambda^* \hat A^+ | \psi \rangle + \langle \phi | \mu^* \hat B^+ | \psi \rangle$$
$$= \langle \lambda \hat A \phi | \psi \rangle + \langle \mu \hat B \phi | \psi \rangle$$
$$= \langle (\lambda \hat A + \mu \hat B) \phi | \psi \rangle$$

$\Rightarrow$ Der Hamiltonoperator $\hat H = \frac{\hat{\vec p}^{\,2}}{2m} + V(\hat x)$ ist hermitesch!

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{(H^+)_{nm} = H^*_{mn} \equiv H_{nm}}}$$

$\Rightarrow$ speziell: $H^*_{nn} = H_{nn}$
$\Rightarrow H_{nn} \in \mathbb{R}$

$$\hat H \hat= \underbrace{\begin{pmatrix} \ddots & & \cdots H_{15} \cdots & \\ \vdots & \text{Diagonale} & & \vdots \\ H_{51} = H_{15}^* & & \in \mathbb{R} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Hamiltonmatrix}}$$

Eigenwerte & -vektoren eines hermiteschen Operators:

$$\hat{H}\,|\phi_n\rangle = E_n\,|\phi_n\rangle$$

$$\hat{H}^{+} = \hat{H}$$

Mathematik: $\{|\phi_n\rangle\}$ ist VONB
(bzw.: kann als solche gewählt werden)

und $E_n \in \mathbb{R}$

z.B.: zeige $E_n \in \mathbb{R}$:

$$\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R} \\ (\text{s.o.!})}}{H_{nn}} = \underbrace{\langle \phi_n | \hat{H} | \phi_n \rangle}_{\cancel{\neq}\ \cancel{\langle \hat{H}\phi_n | \phi_n \rangle \in \mathbb{R}\ (\text{s.o.})}} = E_n \underbrace{\langle \phi_n | \phi_n \rangle}_{=1 \text{ wg. VONB}}$$

$$\Rightarrow E_n \in \mathbb{R}$$

zeige Orthogonalität für $E_n \neq E_m$:

(1) $\hat{H}\,|\phi_n\rangle = E_n\,|\phi_n\rangle$

(2) $\hat{H}\,|\phi_m\rangle = E_m\,|\phi_m\rangle$

$\langle\phi_m|$ auf (1) und dann * $\Rightarrow$

$$\underbrace{\langle \phi_m | \hat{H} | \phi_n \rangle^*}_{= \langle \phi_n | \hat{H} | \phi_m \rangle} = E_n \underbrace{\langle \phi_m | \phi_n \rangle^*}_{\langle \phi_n | \phi_m \rangle}$$

weil $\hat{H} = \hat{H}^{+}$

ziehe davon ab: $\langle\phi_n|$ auf (2) $\Rightarrow$

$$0 = \underbrace{(E_n - E_m)}_{\neq 0} \langle \phi_n | \phi_m \rangle \quad \Rightarrow \langle \phi_n | \phi_m \rangle = 0$$

Basiswechsel:

$$\{|\phi_n\rangle\} \curvearrowright \{|\xi_n\rangle\}$$

$$|\psi\rangle = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle$$

$$= \sum_{n,l} |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\xi_l\rangle \underbrace{\langle\xi_l|\psi\rangle}_{\text{Koeff. in } \xi\text{-Basis}}$$

umgekehrt:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,l} |\xi_l\rangle\langle\xi_l|\phi_n\rangle\langle\phi_n|\psi\rangle \qquad \boxplus$$

Definiere $\quad U_{nl} = \langle\phi_n|\xi_l\rangle = \langle\xi_l|\phi_n\rangle^*$

$$\Rightarrow \langle\phi_n|\psi\rangle = \sum_l U_{nl} \langle\xi_l|\psi\rangle$$

$$(\psi \text{ in } \phi\text{-Basis}) = U \cdot (\psi \text{ in } \xi\text{-Basis})$$

aber auch:

siehe $\boxplus \Rightarrow \langle\xi_l|\psi\rangle = \sum_n U^*_{nl} \langle\phi_n|\psi\rangle$

aber wir können auch sagen: $\langle\xi_l|\psi\rangle = \sum_n (U^{-1})_{ln} \langle\phi_n|\psi\rangle$

$$\Rightarrow (U^{-1})_{ln} = U^*_{nl} = (U^+)_{ln}$$

Allgemein: $\hat{U}$ mit $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^+$ ist ein <u>unitärer</u> Operator!

Es gilt:

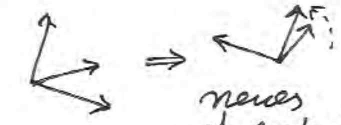
$$\langle\hat{U}\psi|\hat{U}\phi\rangle = \langle\psi|\underbrace{\hat{U}^+}_{\hat{U}^{-1}}\hat{U}\phi\rangle$$

$$= \langle\psi|\phi\rangle$$

$\Rightarrow$ $\hat{U}$ verändert Winkel & Längen nicht

$\hat{U}$ ist wie eine Drehung!

$\hat{U}$ bewirkt einen Basiswechsel



neues Achsenkreuz = neue Basis

Zeitentwicklungsoperator:

sei $\hat{H}$ zeitunabhängig $\Rightarrow$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$$

wird gelöst durch:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle$$

mit $\hat{U}(t) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}\hat{H}t + \frac{1}{2}\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)^2 + \ldots$

(Taylorreihe der e-Funktion)

Beweis: $\frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \left(\frac{d}{dt}\hat{U}(t)\right) |\Psi(0)\rangle$

$$\underset{\uparrow}{=} \left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\right) \underbrace{\hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle}_{|\Psi(t)\rangle}$$

z.B. aus Taylorreihe: jeden Term ableiten!

$\hat{U}(t)$ = "Zeitentwickl.operator"

Falls $|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle$ und $|\phi_n\rangle$ = Eigenvektoren zu $\hat{H}$

$$\Rightarrow \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n \hat{U}(t)|\phi_n\rangle$$

$$= \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\phi_n\rangle$$

$$= \sum_n c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} |\phi_n\rangle$$

weil $\hat{H}|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$

$\Rightarrow \hat{H}^\ell |\phi_n\rangle = E_n^\ell |\phi_n\rangle$

falls $\hat{H} = \hat{H}(t)$ zeitabh. $\Rightarrow$

setze

$$\frac{d\hat{U}(t,t_0)}{dt} \equiv -\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t)\,\hat{U}(t,t_0)$$

und sei $\hat{U}(t_0,t_0) \equiv \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ $|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t,t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle$ löst SGl

(Einsetzen!)

Kontinuierliche Basis

Betrachte "Ortsbasis"

$$|x_0\rangle \hat{=} \delta(x-x_0)$$

$\Rightarrow$

$$\langle x_0|\phi\rangle = \int dx\; \delta(x-x_0)^* \phi(x) \equiv \phi(x_0)$$

$$\langle x_1|x_2\rangle = \int dx\; \delta(x-x_1)^* \delta(x-x_2) = \delta(x_1-x_2)$$

(statt früher $\langle\phi_n|\phi_m\rangle = \delta_{n,m}$)

analog zu vorher nun:

$$\int dx_0\, |x_0\rangle\langle x_0| = \mathbb{1}$$

$$\left(\text{statt} \quad \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| = \mathbb{1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad |\phi\rangle = \int dx_0\, |x_0\rangle \underbrace{\langle x_0|\phi\rangle}_{\underbrace{\phi(x_0)}_{\shortparallel}}$$

"Entwicklungskoeffiz. in der Ortsbasis"

$$\Rightarrow \quad \langle\psi|\phi\rangle = \int dx\; \psi^*(x)\,\phi(x)$$

$$\overset{?}{=} \int dx\; \psi^*(x) \int dx_0\, \delta(x-x_0)\,\phi(x_0) \quad \checkmark$$

$\uparrow$ Darst. von oben

korrekt (führe x_0-$\int$ aus)

Ortsoperator:

$$\hat{x} = \int dx_0 \; |x_0\rangle \underbrace{\langle x_0|\hat{x}|x_0\rangle}_{=x_0} \langle x_0|$$

$$= \int dx_0 \; |x_0\rangle x_0 \langle x_0|$$

Impulsbasis:

~~Entwurf~~ $\langle x_0|p_0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p_0}{\hbar}x_0}$

Es ist

$$\hat{p}\,|p_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{i\frac{p_0}{\hbar}x_0}$$

$$= \frac{p_0}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p_0}{\hbar}x_0} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Eigenwert}}}{p_0}|p_0\rangle$$

Check:

$$\langle p_1|p_2\rangle = \cancel{\tfrac{1}{2\pi\hbar}} \int dx \; \langle p_1|x\rangle \langle x|p_2\rangle$$

$$= \int \frac{dx}{2\pi\hbar} e^{-i\frac{p_1}{\hbar}x} e^{i\frac{p_2}{\hbar}x}$$

$$= \int \frac{dx}{2\pi\hbar} e^{i\frac{p_2-p_1}{\hbar}x}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \cdot 2\pi\delta\left(\frac{p_2-p_1}{\hbar}\right)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \delta(p_2-p_1) \quad \checkmark$$

$$\delta(a\cdot x) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

$\Rightarrow$ Impulsdarstellung einer Wellenfunktion:

$$\langle p|\phi\rangle = \int dx \; \underbrace{\langle p|x\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-i\frac{p}{\hbar}x}} \underbrace{\langle x|\phi\rangle}_{\phi(x)}$$

= im wesentlichen: (bis auf Faktor) Fourier-transformation!

Bem.:
In 3D:

$$\langle \vec{r} | \vec{p} \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^{\,3}} e^{i \frac{\vec{p}}{\hbar} \vec{r}}$$

Bem.: manchmal Wellenvektoren:

$$\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{\,3}} e^{i \vec{k} \vec{r}}$$

(keine $\hbar$)

Matrixelemente?

z.B.

$$\langle p' | \hat{V} | p \rangle = \int \frac{dx}{2\pi\hbar} V(x)\, e^{i \frac{p-p'}{\hbar} x}$$

$\sim$ F.T. des Potentials