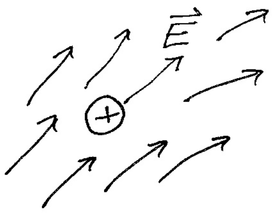
Elektromagnetismus

1. Felder und Maxwellgleichungen

1.1 Kräfte auf Ladungen

Beobachtung: nicht-gravitative Kraft auf Körper,
für $\vec{v} \to 0$ hängt sie nur vom Ort ab und von der Eigenschaft "Ladung":



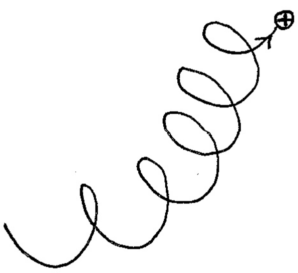
$$\vec{F}_{el} = \underset{\text{Ladung}}{q} \cdot \underset{\text{elektrisches Feld}}{\vec{E}(\vec{r},t)}$$

für $\vec{v} \neq 0$: manchmal zusätzliche Kraft $\perp \vec{v}$ (& linear in $|\vec{v}|$) $\Rightarrow$ $\vec{B}$-Feld "magnetische Flußdichte"

Insgesamt:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{\text{Lorentzkraft}})$$

Lorentzkraft (verrichtet niemals Arbeit: $\vec{F}_{Lorentz} \cdot \vec{v} = 0$)

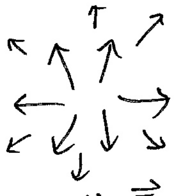


Ladung $[q]$ in Coulomb $[C] = [A \cdot s]$

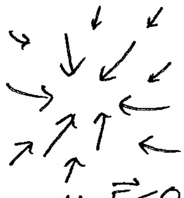
1.2 Vektoranalysis (kurze Wiederholung)

Beliebiges Vektorfeld $\vec{E}(\vec{r})$

$\Rightarrow$ Quellen & Senken



$\mathrm{div}\,\vec{E} > 0$



$\mathrm{div}\,\vec{E} < 0$

"Divergenz" $\quad \mathrm{div}\,\vec{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$

Satz von Gauß:

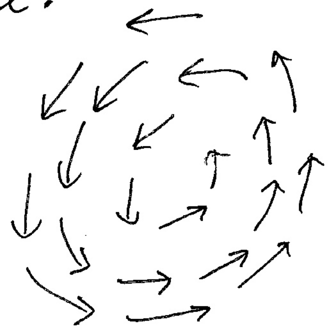
"Fluß" durch Oberfläche:

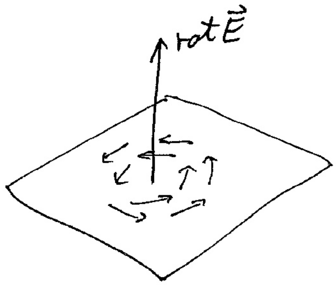
$$\int_{\text{Fläche } S} \vec{E}\, \underbrace{d^2\vec{f}}_{\substack{\text{Vektor} \parallel \hat{n} \\ \text{Betrag = Flächenelement } df}} = \sum_{\text{Flächen-elemente}} (\vec{E}\cdot\hat{n})\, df$$

Gauß sagt:

$$\int_S \vec{E}\, d^2\vec{f} = \int_{\substack{\text{Volumen} \\ (\text{innerhalb } S)}} \mathrm{div}\,\vec{E}\; \underbrace{d^3\vec{r}}_{\text{Volumenelement}}$$

Wirbel:

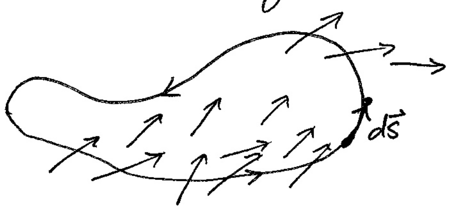




"Rotation" $\quad \operatorname{rot} \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix}$

Satz von Stokes:

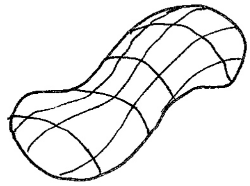
Zirkulation entlang eines Weges



$$\oint_{C} \vec{E}\, d\vec{s}$$
$C \leftarrow$ Kurve

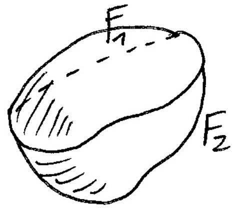
Stokes: $\displaystyle \oint_C \vec{E}\, d\vec{s} = \int \operatorname{rot} \vec{E}\, d^2\vec{f}$

Fläche, die von C begrenzt wird



[Bem.: Jede Fläche ergibt dasselbe, denn:

$$\int_{F_1} \operatorname{rot}\vec{E}\, d^2\vec{f} - \int_{F_2} \operatorname{rot}\vec{E}\, d^2\vec{f} = \int_{F} \operatorname{rot}\vec{E}\, d^2\vec{f} \underset{\text{Gauß}}{=} \int_{\text{innerhalb } F} \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{E}}_{=0}\, d^3\vec{r} = 0$$



1.3 Maxwellgleichungen (im freien Raum)

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ — Keine Quellen des $\vec{B}$-Feldes!

$\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ — Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)\left[\frac{\text{Ladung}}{\text{Vol}}\right]$ als Quelle des el. Feldes

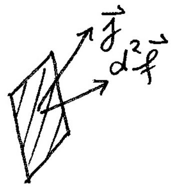
$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ — Zeitlich veränderliches B-Feld $\Rightarrow$ elektrisches Wirbelfeld "Induktionsgesetz"

$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ — Ströme & zeitl. veränderl. E-Felder $\Rightarrow$ magnetisches Wirbelfeld

$\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \dfrac{\mathrm{m\,kg}}{\mathrm{C}^2}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \dfrac{\mathrm{C}^2 \mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^3 \mathrm{kg}}$

$\vec{j}(\vec{r},t) =$ elektrische Stromdichte $\left[\frac{\text{Ladung}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}\right]$



Strom: $I = \dfrac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} = \vec{j} \cdot d^2\vec{f}$

Erste Konsequenzen:

$$0 = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\, \mathrm{div}\,\vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial\, \mathrm{div}\,\vec{E}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0}$$ ("Kontinuitätsglg.")

Ladungserhaltung

Integrale Form: $Q = \int_{\text{Vol}} \rho\, d^3r \Rightarrow \dot{Q} = \int_{\text{Vol}} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\, d^3r$

$= -\int_{\text{Vol}} \mathrm{div}\,\vec{j}\, d^3r$

$\overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\text{Fläche}} \vec{j}\, d^2\vec{f}$ — Ladung strömt raus.

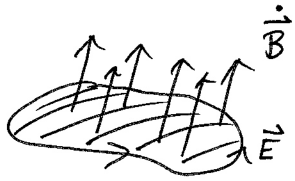
Integrale Variante:

$$\int\limits_{\text{Fläche}} \vec{B}\, d^2\vec{f} = 0$$

$$\int\limits_{F} \vec{E}\, d^2\vec{f} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

innerhalb F

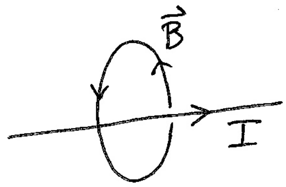
$$\oint \vec{E}\, d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{B}\, d^2\vec{f}}_{\text{magnetischer Fluß}}$$



$$\oint\limits_{\partial F} \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E}\, d^2\vec{f}$$

∂F : Rand der Fläche

$I = \int\limits_{F} \vec{j}\, d^2\vec{f}$



1.4 Potentiale

Es gilt immer ein Vektopotential $\vec{A}$ und ein skalares Potential ϕ, so dass:

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$$
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Check: wenn $\vec{B}, \vec{E}$ so gegeben, dann:

$$\text{div}\,\cancel{\text{rot}}\,\vec{B} = \text{div rot}\,\vec{A} = 0 \checkmark$$
$$\cancel{\text{div}}\ \text{rot}\,\vec{E} = -\underbrace{\text{rot}\,\vec{\nabla}\phi}_{0} - \frac{\partial}{\partial t}\text{rot}\,\vec{A}$$
$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \checkmark$$

& weiter:

$$\text{div}\,\vec{E} = -\text{div grad}\,\phi - \frac{\partial\ \text{div}\,\vec{A}}{\partial t}$$
$$= -\Delta\phi - \frac{\partial}{\partial t}\text{div}\,\vec{A} \overset{!}{=} \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\text{rot}\,\vec{B} = \text{rot rot}\,\vec{A}$$
$$= \text{grad}\,(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

$$\Delta = \text{Laplace-Operator} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$